Возможные решения задач
9 класс

9-1. «Мост» Запишем закон равноускоренного движения поезда по мосту длиной l в первом случае

$$l = v_0 t_1 + \frac{a t_1^2}{2}\,, \qquad (1)$$

где a – модуль ускорения поезда.

Для второго случая (поезд притормаживает) аналогичное уравнение имеет вид

$$l = v_0 t_2 - \frac{a t_2^2}{2}\,. \qquad (2)$$

Искомое время t_3 равномерного движения поезда найдем как

$$t_3 = \frac{l}{v_0}. \qquad (3)$$

Из системы уравнений (1)-(2) можно выразить отношение $\frac{l}{v_0}$. Для этого следует в (1) – (2) избавиться от членов, содержащих ускорение a. Умножим (1) на t_2^2, а (2) , соответственно, на t_1^2 и сложим полученные равенства

$$l\,(t_2^2 + t_1^2) = v_0 t_1 t_2^2 + \frac{a t_1^2 t_2^2}{2} + v_0 t_2 t_1^2 - \frac{a t_2^2 t_1^2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad (4)$$

$$\frac{l}{v_0} = \frac{(t_1 t_2^2 + t_2 t_1^2)}{t_2^2 + t_1^2}. \qquad (5)$$

Таким образом, окончательная формула для t_3 принимает вид

$$t_3 = \frac{l}{v_0} = \frac{(t_1 + t_2) t_1 t_2}{t_2^2 + t_1^2}. \qquad (6)$$

Расчёт по приведенным данным даёт

$$t_3 = 36\ \text{с}\ . \qquad (7)$$

9-2. «Ом в кубе» Рассмотрим всевозможные способы подключения каркасного куба к омметру, одна из клемм которого (например, «земля») постоянно подключена к вершине A куба (Рис. 1).

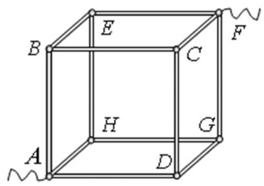


Рис. 1

Начнём расчеты с самой «дальней» вершины F, которая лежит на диагонали куба (см. Рис. 1). В силу симметрии в этом случае вершины B, D, H куба являются эквипотенциальными, и их можно соединить. Это же рассуждение справедливо и для вершин C, E, G куба, т.е. их также можно соединить. Тогда эквивалентная цепь будет иметь вид, представленный на рисунке 2. Такой вариант соединения имеет сопротивление

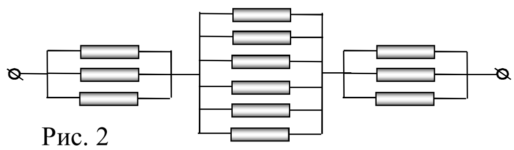


Рис. 2

$$R_{AF} = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5}{6} r = \frac{10}{12} r\ . \qquad (1)$$

Перейдем к вершинам C, E, G куба, которые лежат на диагоналях квадратов, являющихся гранями куба. В силу симметрии, сопротивления куба при этих подключениях будут одинаковы

$$R_{AC} = R_{AE} = R_{AG}\ . \qquad (2)$$

Для определённости рассмотрим вершину G куба. В этом случае пары точек C, D и E, H являются эквипотенциальными, т.к. лежат на «середине пути» от клеммы к клемме. Напряжение между эквипотенциальными точками равно нулю, следовательно, ребра CD и EH схемы можно опустить, поскольку ток по ним не идёт. Схема эквивалентной цепи в этом случае будет иметь вид, представленный на Рис 3.

Сопротивление куба при таком подключении рассчитывается стандартными методами

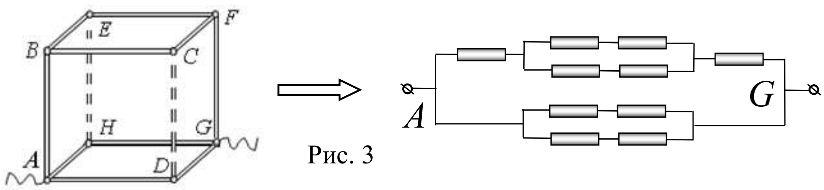
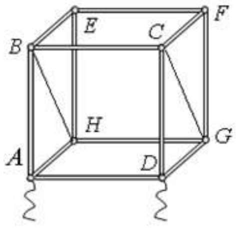


Рис. 3

$$R_{AG} = \frac{3r \cdot r}{3r + r} = \frac{3}{4} r = \frac{9}{12} r\ . \qquad (3)$$

Последний тип возможного подключения второго контакта – подключение к соседней вершине ребра куба (точки B, D, H). Возьмём для определённости случай подключения к вершине D куба. Здесь можно соединить эквипотенциальные пары точек C, G и B, H цепи и мысленно «сплющить» схему. Тогда схема эквивалентной цепи в этом случае будет иметь вид, представленный на рисунке 4. Тогда сопротивление куба в этом случае, опять же, сводится к аккуратным вычислениям параллельных и последовательных соединений



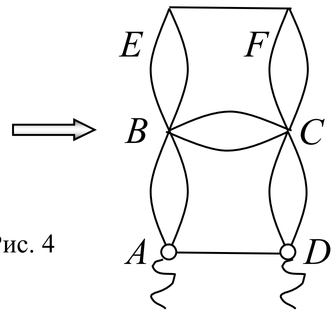


Рис. 4

$$R_{BC} = \frac{2r \cdot r/2}{2r + r/2} = \frac{2}{5} r\ , \tag{4}$$

$$R_{AD} = \frac{(R_{BC}+r) \cdot r}{(R_{BC}+r)+r} = \frac{7}{12} r\ . \tag{5}$$

Анализируя полученные выражения (1), (3) и (5) для различных сопротивлений, расположим их в порядке возрастания, тогда получим

$$R_1 = 7{,}0 \text{ Ом} = \frac{7}{12} r\ , \quad R_3 = 9{,}0 \text{ Ом} = \frac{9}{12} r\ , \quad R_2 = 10 \text{ Ом} = \frac{10}{12} r. \tag{6}$$

Из (6) находим электрическое сопротивление ребра куба

$$r = 12 \text{ Ом}\ . \tag{7}$$

Далее несложно указать, каким вершинам куба соответствуют полученные сопротивления

$$\begin{aligned} R_1 &= 7{,}0 \text{ Ом} \quad \to \quad B, D, H \\ R_3 &= 9{,}0 \text{ Ом} \quad \to \quad C, E, G \\ R_2 &= 10 \text{ Ом} \quad \to \quad F\ . \end{aligned} \tag{8}$$

9-3. «Постоянная планка» Данную задачу удобно решать, рассматривая планку и грузы вместе, как единое целое. Изобразим внешние силы, действующие на систему «планка + грузы» в данной механической системе. Обозначим силы натяжения нитей, на которых висят блоки $\vec{T}_3$ и $\vec{T}_4$ (Рис. 5).

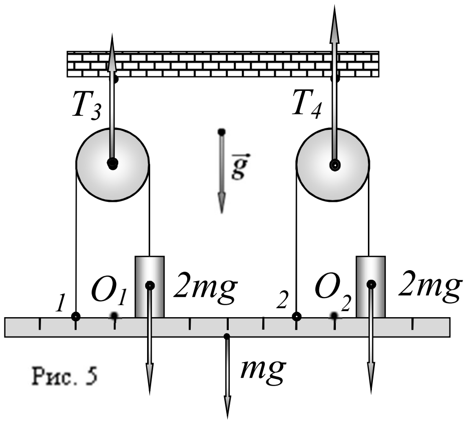


Рис. 5

Поскольку силы натяжения нитей с грузами $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ являются внутренними, то в данном случае их можно не рассматривать (их сумма, так же как сил реакции и давления, равна нулю).

Так как система находится в равновесии, то можно применить правило рычага (моментов) относительно точек O_1 и O_2, лежащих на линии действия сил натяжения нитей, за которые подвешены блоки. Пусть одному делению масштабной шкалы соответствует расстояние a. Тогда, согласно правилу рычага (моментов) получим уравнения для искомых сил. Для точки O_1

$$2mg \cdot a + mg \cdot 3a + 2mg \cdot 7a - T_4 \cdot 6a = 0\ . \tag{1}$$

Относительно второй точки (O_2) имеем похожее уравнение

$$T_3 \cdot 6a - 2mg \cdot 5a - mg \cdot 3a + 2mg \cdot a = 0\ . \tag{2}$$

Из полученной системы уравнений (1) – (2) находим

$$T_4 = \frac{19}{6} mg\ , \quad T_3 = \frac{11}{6} mg. \tag{3}$$

Соответственно, силы натяжения нитей, удерживающих грузы

$$T_1 = \frac{T_3}{2} = \frac{11}{12} mg\ , \tag{4}$$

$$T_2 = \frac{T_4}{2} = \frac{19}{12} mg\ . \tag{5}$$

Силы, действующие на груз, найдем из условия равенства нулю равнодействующей силы для каждого из грузов

$$N_1 = 2mg - T_1 = \frac{13}{12} mg\ , \tag{6}$$

$$N_2 = 2mg - T_2 = \frac{5}{12} mg\ . \tag{7}$$

Расчёт для приведенных данных даёт следующее значение

$$T_1 = \frac{11}{12} mg = 10{,}8\ \text{Н}\ , \tag{8}$$
$$N_2 = \frac{5}{12} mg = 4{,}91\ \text{Н}\ . \tag{9}$$

Подчеркнем, что точки O_1 и O_2 можно выбирать различными способами (например, на осях грузов). Вид системы уравнений при этом несколько усложняется

$$T_1 \cdot 2a + mg \cdot 2a - T_2 \cdot 4a + (2mg - T_2) \cdot 6a = 0\ , \tag{10}$$
$$T_1 \cdot 8a - (2\,mg - T_1) \cdot 6a - mg \cdot 4a + T_2 \cdot 2a = 0\ , \tag{11}$$

но ответы, разумеется, получаются те же ((4), (5)). Это и понятно, ведь все правильные способы решения (в отличие от неправильных!) ведут к одному и тому же ответу.

9-4. «Стертая линза» Для нахождения оптического центра линзы попарно соединим точки A и A', B и B'. Точка пересечения отрезков (Рис. 6) даст нам положение оптического центра C линзы. Из построения следует, что его координаты

$$C\ (11; -3). \tag{1}$$

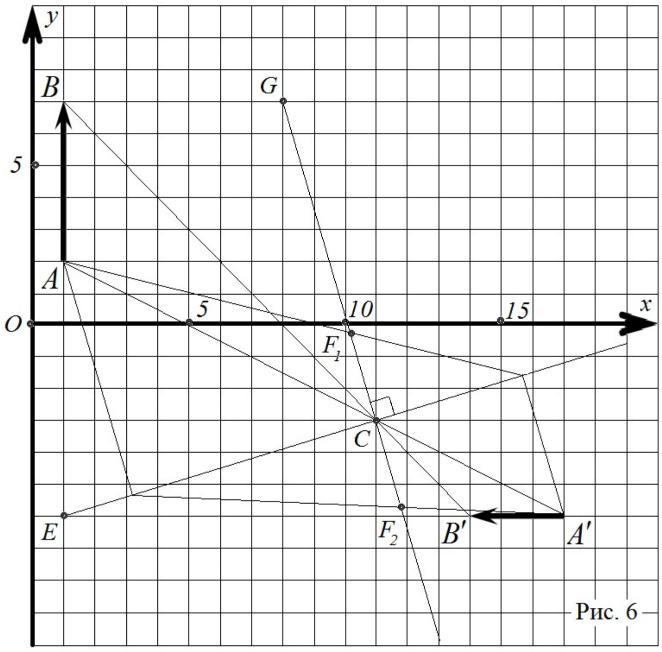


Рис. 6

Для нахождения положения линзы нужна еще одна точка, поскольку прямую по одной точке не проведешь. Для этого продолжим стрелки AB и $A'B'$ до пересечения, это и даст вторую точку E линзы. Отрезок EC даст нам положение линзы. Восстанавливая перпендикуляр CG к EC из точки C, найдем положение главной оптической оси CG линзы.

Для нахождения главных фокусов тонкой линзы воспользуемся свойствами лучей, параллельных главной оптической оси. Из точек A и A' проведём прямые, параллельные главной оптической оси CG линзы. После преломления в линзе они пройдут через точки её главных фокусов F_1 и F_2 . Как следует из построения, ближайшие к главным фокусам узлы сетки имеют координаты

$$F_1\ (10; 0), \tag{2}$$
$$F_2\ (12; -6). \tag{3}$$

Поскольку предмет AB и его изображение $A'B'$ находятся по разные стороны от оптической оси линзы, то она является собирающей (положительной). В соответствии с таблицей изображений для собирающей линзы изображение $A'B'$ является действительным, обратным и уменьшенным.

Для оценки оптической силы линзы примем, что её главные фокусы находятся в точках ближайших узлов сетки. По теореме Пифагора найдем фокусное расстояние (несколько с избытком)

$$F = d_0\sqrt{(3^2 + 1^2)} = 3{,}2\ \text{см}. \tag{4}$$

Тогда искомая оптическая сила линзы

$$D = \frac{1}{F} = \frac{1}{3{,}2 \cdot 10^{-2}\text{м}} = 31\ \text{дптр}. \tag{5}$$

Поскольку оценка является приближенной, необходимо её погрешность. Для этого возьмем расстояние до следующего соседнего узла сетки (несколько с недостатком)

$$F = d_0\sqrt{(2^2 + 1^2)} = 2{,}2\ \text{см} \quad \rightarrow \quad D = \frac{1}{2{,}2 \cdot 10^{-2}\text{м}} = 45\ \text{дптр}. \tag{6}$$

Используя метод границ, запишем окончательный результат

$$F = (38 \pm 7)\ \text{дптр},\ \ \varepsilon = 18\ \%\ . \tag{7}$$

Достаточно большая погрешность оценки оптической силы линзы обусловлена крупной клеткой на чертеже, которая не позволяет более точно определить фокусное расстояние линзы.

9-5. «Спасательный канат» Груз перестает тонуть потому, что сила Архимеда, действующая на него и на канат, по мере погружения груза увеличивается быстрее силы тяжести системы. Соответственно, в какой-то момент сила Архимеда становится равной силе тяжести системы

$$mg = F_A \,. \tag{1}$$

Обозначим массу погруженной в воду части каната m_1 , а массу груза – m_2. Тогда масса системы $m = m_1 + m_2$, а силу Архимеда запишем с учётом объёмов воды, вытесненной как канатом ($V_1 = m_1/\rho_1$), так и грузом ($V_2 = m_2/\rho_2$)

$$(m_1 + m_2)g = \rho_0 g(V_1 + V_2)\,. \qquad \Longrightarrow \tag{2}$$

$$m_1 + m_2 = \rho_0\left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}\right). \tag{3}$$

Из (3) после несложных алгебраических преобразований получаем

$$\rho_2 = \frac{\rho_0\rho_1 m_2}{\rho_1(m_1+m_2) - m_1\rho_0}\,. \tag{4}$$

Поскольку в нашем случае $m_1 = m_2$, то формула (4) принимает вид

$$\rho_2 = \frac{\rho_0\rho_1}{2\rho_1 - \rho_0} = 8{,}83 \cdot 10^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\,. \tag{5}$$

Судя по полученному значению плотности материала (от школьников не требуется!), данный груз изготовлен из какого-то медного сплава (например, никелина), поскольку плотность чистой меди $\rho_\text{м} = 8{,}96 \cdot 10^3$ кг/м^3 очень близка к полученному значению.