Возможные решения задач
11 класс

11-1. «Трёхмерное движение» Рассмотрим движение материальной точки в плоскости xOy по приведенным в условии законам

$$x(t) = A\cos\omega t \quad (1)$$

$$y(t) = A\sin\omega t. \quad (2)$$

Используем аналогию между колебательным и вращательным движением по окружности. Пусть материальная точка равномерно вращается по окружности радиуса $R = A$ (Рис. 12) с угловой скоростью ω против часовой стрелки из начального положения $B\ (A; 0)$. Тогда её линейная скорость движения равна $\upsilon = \omega R = \omega A$. За промежуток времени t точка повернется на угол $\varphi = \omega t$, а её координаты $x(t)$ и $y(t)$ в момент времени t будут совпадать с (1) и (2).

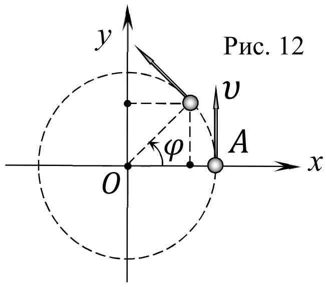

Рис. 12

Следовательно, движение точки B в данной плоскости является равномерным вращением вокруг точки начала координат со скоростью $\upsilon = \omega A$. Соответственно, проекции мгновенной скорости точки на оси координат через промежуток времени t найдём из чертежа

$$\upsilon_x(t) = -\omega A\sin\omega t, \quad (3)$$

$$\upsilon_y(t) = \omega A\cos\omega t. \quad (4)$$

Движение точки B вдоль оси Oz описывается зависимостью

$$z(t) = A\omega t\ , \quad (5)$$

т.е. является равномерным со скоростью

$$\upsilon_z(t) = A\omega. \quad (6)$$

Мысленно «совмещая» два движения, получаем, что точка B движется по винтовой линии (Рис. 13), ось которой совпадает с осью Oz декартовой системы координат. Винтовая линия (иногда, не совсем корректно её называют «спиралью») характеризуется радиусом R и шагом h (см. Рис. 13). В нашем случае её характерные особенности

$$R = A, \text{ а } h = \upsilon_z T = \upsilon_z \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi A\ , \quad (7)$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1{,}00$ с – период обращения точки по окружности.

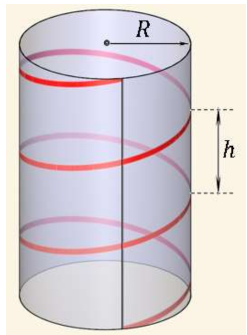

Рис. 13

Используя «трёхмерную» теорему Пифагора найдем модуль скорости $\upsilon(t)$ материальной точки в момент времени t

$$\upsilon(t) = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}\ . \quad (8)$$

Подставляя в (8) выражения для скоростей (3), (4) и (6) получим

$$\upsilon(t) = \sqrt{(-\omega A\sin\omega t)^2 + (\omega A\cos\omega t)^2 + (A\omega)^2} = \sqrt{2}\omega A. \quad (9)$$

Как следует из (9), данное движение материальной точки является равномерным (и криволинейным), поскольку $\upsilon(t) = const$. Следовательно, искомый путь материальной точки

$$l = \upsilon t = \sqrt{2}\omega A t = 1{,}33 \text{ м}. \quad (10)$$

Поскольку за промежуток времени $t_1 = 1{,}00$ с материальная точка сделает ровно один оборот, то модуль её перемещения равен шагу винтовой линии

$$S = |\vec{S}| = h = 2\pi A = 94{,}2 \text{ см}. \quad (11)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) все окончательные расчёты приводим с точностью до трёх значащих цифр.

11-2. «Гибкая цепочка» В первом случае (нить привязана в точке B цепочки), цепочка движется поступательно, следовательно, её можно заменить грузом массой m, который скользит по гладкой горизонтальной поверхности. В этом случае движение системы будет равноускоренным (Рис. 14 а)).

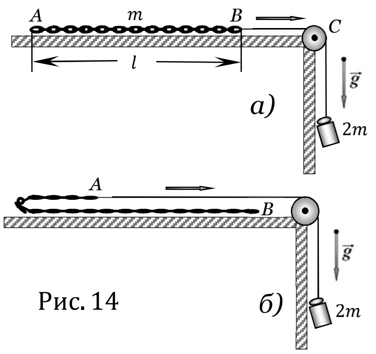

Рис. 14

Ускорение a системы в этом случае найдем из второго закона Ньютона, записанного для движения груза и цепочки. Поскольку нить нерастяжима и невесома, то модули ускорений и модули сил упругости нити для цепочки и для гири одинаковы ($a_1 = a_2 = a$, $T_1 = T_2 = T$) . Следовательно

$$ma = T \,, \tag{1}$$

$$2ma = 2mg - T \,, \tag{2}$$

где – T модуль силы упругости (натяжения) нити.

Решение системы (1) – (2) даёт

$$a = \frac{2m}{2m+m} g = \frac{2}{3} g \,, \tag{3}$$

$$T = \frac{2}{3} mg. \tag{4}$$

Следовательно, время t_1, за которое гиря опустится на расстояние l , найдем из равенства

$$l = \frac{a t_1^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad t_1 = \sqrt{3}\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{5}$$

Во втором случае (нить привязана в точке A цепочки) цепочка при движении начинает заворачиваться, и при этом изменяется её импульс, поскольку одна часть цепочки уже движется, а вторая – ещё нет (Рис. 14 а)).

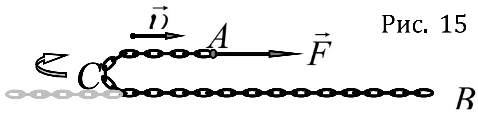

Рис. 15

Для таких систем (систем с переменной массой) вместо традиционной формы записи основного закона динамики ($\vec{F} = m\vec{a}$) следует использовать более общую форму – импульсную

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}\Delta t = \Delta\vec{P}, \tag{6}$$

где – $\Delta\vec{P}$ изменение импульса системы за промежуток времени Δt.

Пусть на конец A цепочки (Рис. 15) действует постоянная сила $\vec{F}$, направленная вправо. Заметим, что если конец A нерастяжимой цепочки под действием силы движется с некоторой скоростью v, то точка её перегиба C (см. Рис. 15) движется со скоростью $\frac{v}{2}$. Следовательно, за промежуток времени t в движение со скоростью v придет часть цепочки массой $\Delta m = \frac{m}{l}\cdot\frac{v}{2} t$. Импульс этой подвижной части цепочки к моменту времени t будет равен изменению импульса ΔP системы

$$\Delta P = \Delta m v = \frac{m}{l}\cdot\frac{v^2}{2} t\,. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), получаем

$$Ft = \frac{m}{l}\cdot\frac{v^2}{2} t\,, \tag{8}$$

откуда находим скорость v установившегося движения конца A цепочки

$$v = \sqrt{\frac{2lF}{m}}\,. \tag{9}$$

В нашем случае $F = 2mg$, следовательно

$$v = 2\sqrt{gl}\,. \tag{10}$$

Пренебрегая временем установления скорости (что вполне допустимо для цепочек с «мелким» звеном), найдём искомое время t_2

$$t_2 = \frac{l}{v} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,. \tag{11}$$

Из сравнения (11) и (5) получаем окончательный ответ

$$t_2 = \frac{t_1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} t_1 = 0{,}29\, t_1\,. \tag{12}$$

11-3. «Двойной математический маятник» Отклоним двойной математический маятник на угол α от вертикали. Поскольку при этом мы совершаем работу по поднятию грузов, то потенциальная энергия системы увеличится на

$$E^{\text{п}} = mg\Delta h + Mg\Delta H = (ml + ML)g(1 - \cos\alpha)\ . \qquad (1)$$

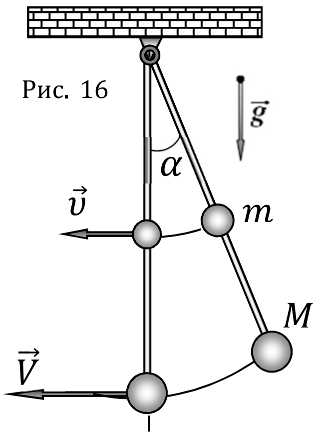

Рис. 16

Если отпустить маятник, то он придет в движение, в процессе которого его потенциальная энергия будет переходить в кинетическую энергию вращательного движения. Соответственно, в нижней точке колебаний для кинетической энергии системы можем записать

$$E^{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}(ml^2 + ML^2)\ . \qquad (2)$$

Согласно закону сохранения энергии приравняем (1) и (2) и выразим угловую скорость вращения двойного математического маятника в нижней точке траектории

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(1-\cos\alpha)(ml+\quad)}{ml^2+ML^2}}\ . \qquad (3)$$

Подберём длину l^* математического маятника таким образом, чтобы в нижней точке (а значит и в любой!) траектории его угловая скорость вращения была равна (3) (т.н. «синхронный» математический маятник). Тогда период малых колебаний синхронного математического маятника будет равен периоду колебаний рассматриваемого маятника.

Повторяя рассуждения, аналогичные (1) – (2), для математического маятника получим

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(1-\cos\alpha)}{l}}\ . \qquad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), находим, что длина синхронного маятника в данном случае равна

$$l^* = \frac{ml^2+ML^2}{ml+ML}\ . \qquad (5)$$

Следовательно, период колебаний двойного математического маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^*}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2+ML^2}{(ml+M\ \ )g}}\ . \qquad (6)$$

Расчёт по формуле (6) для данных, приведенных в условии, даёт

$$T = 2{,}7\ \text{с}. \qquad (7)$$

11-4. «Лестничные циклы» Для нахождения коэффициента полезного действия

$$\eta = \frac{A}{Q_1}$$

цикла необходимо вычислить работу A, совершенную газом за весь цикл и количество теплоты Q_1, полученное идеальным одноатомным газом от нагревателя.

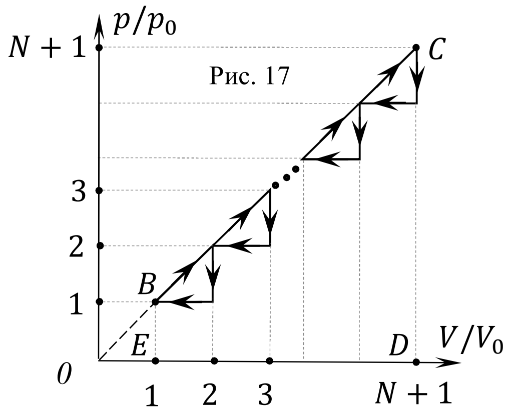

Рис. 17

Учитывая, что площадь одного треугольника на рисунке $A_0 = \frac{p_0V_0}{2}$, то работа газа за весь цикл

$$A = \frac{p_0V_0}{2}N\ . \qquad (1)$$

Для нахождения количества теплоты Q_1 воспользуемся первым началом термодинамики

$$Q_1 = \Delta U + A\ , \qquad (2)$$

где ΔU – изменение внутренней энергии газа на участке, где работает нагреватель, а A – работа газа на этом же участке.

Работа газа равна площади трапеции $BCDE$, отмеченной на рисунке

$$A = \frac{p_0+(N+1)p_0}{2}NV_0 = \frac{N(N+2)}{2}p_0V_0\ . \qquad (3)$$

Изменение внутренней энергии идеального одноатомного газа на этом участке

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu RT_2 - \frac{3}{2}\nu RT_1 = \frac{3}{2}(N+1)^2p_0V_0 - \frac{3}{2}p_0V_0 = \frac{3}{2}p_0V_0N(N+2)\ . \qquad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получаем окончательную формулу

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{\frac{p_0V_0}{2}N}{2p_0V_0N(N+2)} = \frac{1}{4(N+2)} \,. \quad (5)$$

При $N = 8$ получаем

$$\eta_1 = \frac{1}{4(N+2)} = 2{,}5\ \% \,. \quad (6)$$

Как следует из (6) , КПД такого цикла достаточно мал и примерно равен КПД плохонького паровоза…☺

11-5. «Одноразовый ускоритель» Поскольку конденсатор заряжен, то по цепи пойдет электрический ток, который будет уменьшать заряд $q(t)$ конденсатора со временем. По определению, сила тока в цепи

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \,, \quad (1)$$

где Δq – малое изменение (в данном случае убыль) заряда конденсатора за малый промежуток времени Δt.

Сила Ампера, разгоняющая стержень в этот момент

$$F_A = IBl = \frac{\Delta q}{\Delta t} Bl \,. \quad (2)$$

Согласно второму закону Ньютона в импульсной форме сила Ампера за малый промежуток времени Δt увеличит скорость движения стержня на малую величину Δv, причём

$$F_A \Delta t = -\frac{\Delta q}{\Delta t} Bl \Delta t = m \Delta v \,. \quad (3)$$

Из (3) понятно, что малое приращение (увеличение) скорости стержня Δv связано с малым приращением (убылью) заряда конденсатора Δq следующим образом

$$\Delta v = -\frac{Bl}{m} \Delta q. \quad (4)$$

Суммируя малые приращения Δv скорости стержня, найдём его скорость в момент, когда заряд конденсатора уменьшился от значения q_0 до некоторого значения q.

$$v = \sum_i \Delta v_i = -\frac{Bl}{m} \sum_i \Delta q_i = -\frac{Bl}{m}(q - q_0) = \frac{Bl}{m}(q_0 - q) \,. \quad (5)$$

Как следует из (4), по мере разгона стержня ($v\uparrow$) заряд ($q \downarrow$) и напряжение ($U \downarrow$) на конденсаторе убывают.

При этом на концах стержня индуцируется возрастающая ЭДС обратной полярности (согласно правилу Ленца)

$$\epsilon_i = vBl. \quad (6)$$

Следовательно, в какой-то момент времени ЭДС индукции ϵ_i станет равна по модулю остаточному напряжению U_{min} на конденсаторе, после чего ток в цепи исчезнет, поскольку суммарное напряжение в контуре будет равно нулю

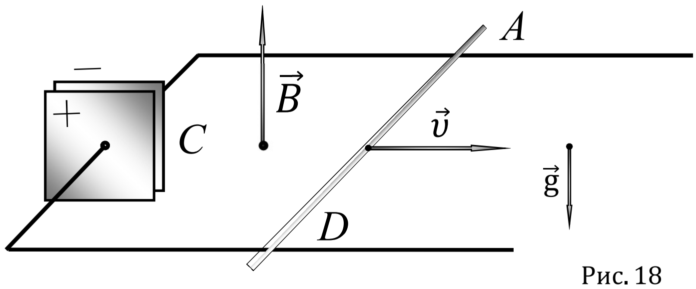

Рис. 18

$$v_{max} Bl = U_{min} = \frac{q_{min}}{C} \,. \quad (7)$$

Подставляя в (7) значение скорости (5), найдем установившееся значение заряда q_{min} на конденсаторе

$$\frac{Bl}{m}(q_0 - q_{min}) Bl = \frac{q_{min}}{C} \,, \quad (8)$$

откуда

$$q_{min} = \frac{B^2 l^2 C}{m + B^2 l^2 C} q_0 = \frac{B^2 l^2 C^2 U_0}{m + B^2 l^2 C} \,. \quad (9)$$

Используя (9) и (5), находим окончательную скорость стержня после окончания разгона

$$v_{max} = \frac{CBlU_0}{m + B^2 l^2 C} = 1{,}0\ \text{м/с} \,. \quad (10)$$

При этом остаточное значение напряжения U_{min} на конденсаторе можем найти как отношение остаточного (минимального) заряда q_{min} конденсатора к его электроёмкости

$$U_{min} = \frac{q_{min}}{C} = Blv_{max} = \frac{B^2 l^2 C U_0}{m + B^2 l^2 C} = 6{,}1\ \text{В}. \quad (11)$$