

Возможные решения задач 10 класс

10-1. «Спасение опаздывающего ...» Опаздывающий пассажир имеет шанс заскочить в последнюю дверь последнего вагона, если побежит под некоторым углом α к отрезку AC со скоростью v . Предположим, что ему это удалось, и через промежуток времени t он догнал движущийся поезд в точке D (Рис. 7).

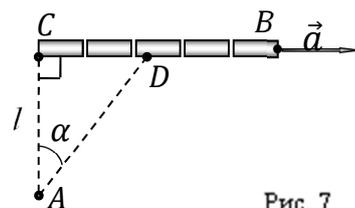


Рис. 7

Запишем теорему Пифагора для прямоугольного треугольника ACD

$$AD^2 = (vt)^2 = AC^2 + CD^2 = l^2 + \left(\frac{at^2}{2}\right)^2. \quad (1)$$

Преобразуем (1) к удобному виду

$$a^2 t^4 - 4v^2 t^2 + 4l^2 = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) является биквадратным, поэтому имеет смысл сделать стандартную замену переменных $z = t^2$, тогда мы приходим к квадратному уравнению относительно новой переменной z

$$a^2 z^2 - 4v^2 z + 4l^2 = 0. \quad (3)$$

Решение (3) имеет вид

$$z = 2 \left(\frac{v^2 \pm \sqrt{v^4 - a^2 l^2}}{a^2} \right). \quad (4)$$

Учитывая, что $z = t^2$, находим два положительных корня для удачной погони пассажира

$$t_1 = \sqrt{2 \frac{v^2 - \sqrt{v^4 - a^2 l^2}}{a^2}},$$

$$t_2 = \sqrt{2 \frac{v^2 + \sqrt{v^4 - a^2 l^2}}{a^2}}. \quad (5)$$

Как следует из (5), при достаточно большой скорости бега расчетливый пассажир сможет догнать поезд двумя (!) способами: по «быстрой» траектории (t_1) и по «медленной» – (t_2 , ($t_2 > t_1$)).

При минимальной скорости бега v_{min} дискриминант уравнения (3) обращается в нуль ($t_2 = t_1 = \sqrt{2} \frac{v}{a}$) – при этом догнать поезд можно уже только одним способом, поскольку уравнение имеет только один корень. Следовательно, в этом случае

$$v_{min} = \sqrt{al} = 6,0 \frac{\text{М}}{\text{с}} = 22 \text{ км/ч}. \quad (6)$$

Надо сказать, что пассажиру (да ещё с чемоданом!) придётся сильно постараться, поскольку развить такую скорость на перроне далеко не всегда получится ... ☺

Для нахождения угла α из треугольника ACD запишем

$$\tan \alpha = \frac{CD}{l} = \frac{\frac{at^2}{2}}{l} = \frac{a}{2l} \cdot \left(2 \frac{v_{min}^2}{a^2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45^\circ. \quad (7)$$

Из (7) следует, что при скорости бега v_{min} пассажир должен догонять поезд строго под углом

$$\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}. \quad (8)$$

Заметим, что при меньшей скорости бега ($v < v_{min}$) пассажир не сможет догнать поезд ни под каким углом бега к отрезку AC .

10-2. «Тройная точка» После пережигания горизонтальной нити сила её упругости (натяжения) исчезает, следовательно, равновесие в системе нарушается, и грузики начинают движение с некоторыми ускорениями \vec{a}_1 и \vec{a}_2 , соответственно.

Установим направления векторов \vec{a}_1 и \vec{a}_2 «сразу после» пережигания горизонтальной нити. Понятно, что сразу после пережигания нити скорости грузиков все ещё равны нулю $v=0$.

Далее грузик массой m_1 под действием сил $m_1\vec{g}$, \vec{T} и \vec{N} начнет движение по дуге окружности AB (Рис. 8) с ускорением \vec{a}_1 , направленным по касательной к этой дуге, т.к. при этом его центростремительное ускорение (v^2/R) практически равно нулю. Следовательно, вектор \vec{a}_1 перпендикулярен нити и составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом.

На грузик массой m_2 в начальный момент времени действуют силы тяжести и упругости (натяжения) нити, направленные по вертикали, поэтому его ускорение \vec{a}_2 может быть направлено только по вертикали вниз.

Запишем уравнения второго закона Ньютона для каждого из шариков в проекциях на направления их ускорений

$$m_1 a_1 = (m_1 g + T) \sin \alpha, \quad (1)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T, \quad (2)$$

где T – модуль силы упругости нити, соединяющий грузики.

Поскольку нить нерастяжима, то проекции обоих ускорений на вертикаль должны быть одинаковы, следовательно

$$a_2 = a_1 \sin \alpha. \quad (3)$$

Для решения системы (1) – (3) выразим из первого уравнения системы силу упругости нити

$$T = \frac{m_1}{\sin \alpha} (a_1 - g \sin \alpha). \quad (4)$$

Полученное значение T подставим в (2), где заменим a_2 с учётом равенства (3)

$$m_2 a_1 \sin \alpha = m_2 g - \frac{m_1}{\sin \alpha} (a_1 - g \sin \alpha). \quad (5)$$

Из (5) находим искомое выражение для a_1 сразу после прижигания горизонтальной нити системы

$$a_1 = \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha}{(m_1 + m_2 \sin^2 \alpha)} g. \quad (6)$$

Расчет по формуле (6) при заданных параметрах с точностью до трёх значащих цифр (требуется условие) даёт окончательный результат

$$a_1 = 10,2 \text{ м/с}^2. \quad (7)$$

Тот факт, что модуль ускорения первого грузика больше ускорения свободного падения в данном случае не проблематичен, поскольку это ускорение является касательным (тангенциальным), и имеет два компонента. Напомним, что вектор \vec{a}_1 составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом (или 30° с вертикалью).

При этом ускорение $a_2 = 8,83 \text{ м/с}^2$ не превосходит ускорения свободного падения, т.е. вертикальная нить имеет некоторое натяжение, что и предполагалось при решении.

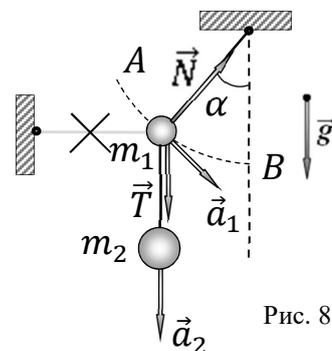


Рис. 8

10-3. «Подвижное зеркало» Для решения данной задачи рассмотрим по отдельности различные простые случаи движения источника и зеркала относительно земли, а также влияние этих движений на скорость движения изображения источника в зеркале в этой же системе отсчета. Затем обобщим полученные результаты.

Пусть зеркало B неподвижно ($\vec{v}_2 = \vec{0}$). Тогда скорость движения светящейся точки можно разложить на два компонента: нормальный плоскости зеркала ($v_{\perp} = v_1 \cos \alpha$) и параллельный ему ($v_{\parallel} = v_1 \sin \alpha$). При неподвижном зеркале, в силу симметрии, аналогичные по модулю компоненты скорости (v_{\perp} и v_{\parallel}) будет иметь и изображение светящейся точки A в плоском зеркале. При этом модули скоростей v_3 и v_1 , а также углы γ и α (Рис. 9) будут одинаковы ($\gamma = \alpha$).

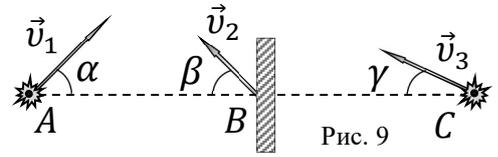


Рис. 9

Теперь пусть будет неподвижным источник (светящаяся точка A), а движется плоское зеркало. Убедимся, что при движении зеркала картина меняется.

Если зеркало поступательно движется «вдоль самого себя», т.е. перпендикулярно отрезку AC (v_{\parallel}), то расстояние от него до неподвижного источника не изменяется. Следовательно, изображение источника в зеркале остается на месте. Таким образом, движение зеркала в этом направлении не вызывает движения изображения (т.е. его скорость $v_{\parallel} = v_2 \sin \beta$ можно не учитывать!).

Пусть теперь зеркало движется поступательно со скоростью $v_{\perp} = v_2 \cos \beta$ к неподвижному источнику A . Поскольку зеркало всегда находится посередине между источником и его изображением, то расстояние до изображения всегда в два раза больше расстояния до зеркала. Следовательно, при движении зеркала со скоростью v_{\perp} к неподвижному источнику A , скорость приближения его изображения к A будет в два раза больше $v_{3\perp} = 2v_{\perp} = 2v_2 \cos \beta$.

Теперь рассмотрим одновременное движение и источника, и зеркала навстречу друг другу. Если источник A со скоростью v приближается к зеркалу, а зеркало движется со скоростью u по направлению к источнику, то (см. выше) скорость движения изображения (по направлению к источнику) будет $v + 2u$ относительно земли.

Объединяя все вышерассмотренные пункты, для компонент искомой скорости v_3 изображения можем записать следующие выражения

$$v_{3\perp} = v_1 \cos \alpha + 2v_2 \cos \beta, \quad (1)$$

$$v_{3\parallel} = v_1 \sin \alpha. \quad (2)$$

Используя (1) и (2), используя теорему Пифагора, найдем модуль v_3 скорости движения светящейся точки

$$v_3 = \sqrt{(v_{3\perp}^2 + v_{3\parallel}^2)} = \sqrt{((v_1 \cos \alpha + 2v_2 \cos \beta)^2 + (v_1 \sin \alpha)^2)}, \quad (3)$$

$$v_3 = \sqrt{v_1^2 + 4v_2 \cos \beta (v_1 \cos \alpha + v_2 \cos \beta)} = 3,2 \text{ см/с}. \quad (4)$$

А также угол γ , под которым это изображение движется к отрезку AC

$$\tan \gamma = \frac{v_{3\parallel}}{v_{3\perp}} = \frac{v_1 \sin \alpha}{v_1 \cos \alpha + 2v_2 \cos \beta} = 0,544 \implies \gamma = 29^\circ. \quad (5)$$

Как видим из (5), вопреки распространенному мнению, в общем случае (движется и источник, и зеркало) направления движения источника и его изображения в плоском зеркале различны ($\gamma \neq \alpha$). Это связано с тем, что различные составляющие ($v_{3\perp}$ и $v_{3\parallel}$) вектора \vec{v}_3 преобразуются по-разному при движении зеркала.

Подчеркнём, что поскольку все данные в условии данной задачи даны с двумя значащими цифрами, то и все окончательные численные ответы следует также округлить также до двух значащих цифр. Напомним, что при этом в промежуточных расчетах (если они необходимы, как, например, расчёт $\tan \gamma = 0,544$ в (5)) сохраняем одну запасную цифру, т.е. округляем до трех значащих цифр.

10-4. «Горячая точка» Из анализа диаграммы приведенного цикла следует, что на участке AB цикла температура идеального газа возрастает, поскольку его давление изохорно растёт (закон Шарля).

Аналогично можно заметить, что на участке CA цикла температура идеального газа падает, поскольку его объём изобарно уменьшается (закон Гей – Люссака). Следовательно, искомая максимальная температура T_{max} идеального газа в данном цикле достигается где-то на участке BC .

Запишем зависимость давления p газа от его объёма V (уравнение прямой BC) в виде $p(V) = A \cdot V + B$, используя тот факт, что она проходит через точки $B(V_0; 3p_0)$ и $C(3V_0; p_0)$ с известными координатами

$$p_B = A \cdot V_B + B, \tag{1}$$

$$p_C = A \cdot V_C + B. \tag{2}$$

Из системы (1) – (2) находим

$$A = \frac{p_B - p_C}{V_B - V_C} = -\frac{2p_0}{2V_0} = -\frac{p_0}{V_0}, \tag{3}$$

$$B = \frac{p_B V_C - p_C V_B}{V_C - V_B} = 4p_0. \tag{4}$$

Подставляя полученное уравнение прямой $p(V) = A \cdot V + B$ в уравнение состояния идеального газа в форме Клапейрона – Менделеева

$$pV = \nu RT, \tag{5}$$

найдем зависимость температуры T газа от его объёма V

$$T(V) = \frac{pV}{\nu R} = (A \cdot V + B)V \frac{1}{\nu R} = \frac{1}{\nu R} (4p_0 - \frac{p_0}{V_0} \cdot V)V, \tag{6}$$

где ν – фиксированное количество вещества газа, R – молярная газовая постоянная.

Как следует из (6), зависимость $T(V)$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз. Следовательно, максимальное значение температуры T_{max} достигается в её вершине при значении объёма V^*

$$V^* = -\frac{B}{2A} = 2V_0. \tag{7}$$

Следовательно, максимальная температура T_{max} в цикле достигается в точке с термодинамическими параметрами $(2V_0, 2p_0)$, что соответствует на диаграмме точке D (Рис. 10) с координатами $D(2, 2)$.

Подчеркнем, что в точке D изотерма идеального газа касается отрезка BC (см. Рис. 10), имея с ним одну общую точку, тогда как изотермы более низких температур пересекают отрезок в двух точках. Соответственно, изотермы более высоких температур не имеют с отрезком BC ни одной общей точки (на Рис. 10 не показаны).

Подставляя значение V^* в выражение (6) получаем искомое значение

$$T_{max} = \frac{1}{\nu R} \left(4p_0 - \frac{p_0}{V_0} \cdot 2V_0 \right) 2V_0 = 4 \frac{p_0 V_0}{\nu R} = 4T_A. \tag{8}$$

Учитывая, что $T_A = 273$ К, получаем (с учётом правил округления окончательного результата)

$$T_{max} = 1,1 \cdot 10^3 \text{ К} = 8,2 \cdot 10^2 \text{ }^\circ\text{C}. \tag{9}$$

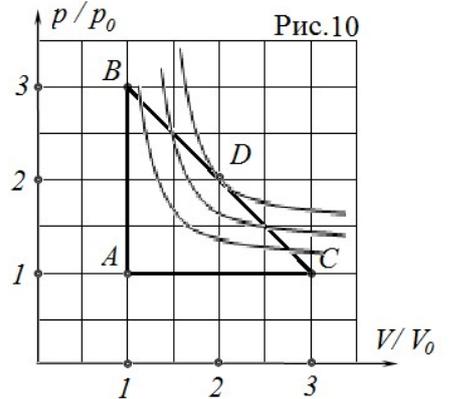


Рис.10

10-5. «Неоднородные шероховатости» Кинетическая энергия шайбы в процессе движения расходуется на работу против сил трения, вследствие чего ее скорость монотонно уменьшается.

Скорость шайбы v на расстоянии S от точки начала движения определим из закона сохранения механической энергии. При начальной скорости v_0 и массе шайбы m имеем

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A(S), \quad (1)$$

где $A(S)$ — работа, которую совершает переменная сила трения на пути S .

На малом участке пути ΔS ($\Delta S \ll S$) силу трения можно считать постоянной, тогда она совершит элементарную работу

$$\Delta A(S) = -\mu(S)mg\Delta S, \quad (2)$$

где $\mu(S)$ — коэффициент трения на расстоянии S от точки начала движения.

Поскольку величина элементарной работы $\Delta A(S)$ на данном участке не зависит от модуля скорости прохождения шайбой этого участка (трение сухое), то она не изменится и при другой начальной скорости шайбы.

Соответственно, при начальной скорости v_1 шайба остановится, пройдя путь S_1 , который можно определить из соотношения

$$-\frac{mv_1^2}{2} = A(S_1). \quad (3)$$

Подставляя $A(S_1)$ из (3) в (1), получаем

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{mv_1^2}{2}, \quad (4)$$

откуда находим величину скорости v на графике (рис. 11), соответствующей точке остановки шайбы во втором случае

$$v = \sqrt{v_0^2 - v_1^2}, \quad v = 3,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (5)$$

Из графика находим, что скорость шайбы уменьшится до значения $v = 3,0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ на отметке $S = 5,0 \text{ м}$, т.е. при начальной скорости $v_2 = 4,0 \text{ м/с}$ шайба пройдет до полной остановки путь

$$S_2 = 5,0 \text{ м}. \quad (6)$$

