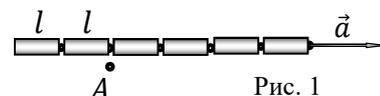


## Возможные решения задач

### 9 класс

**9-1. «Опаздывайте с умом!»** Пусть ускорение электрички после начала движения ( $v_0 = 0$ ) равно  $a$ , тогда в момент появления пассажира на платформе в точке  $A$  скорость  $v$  электрички будет равна



$$v = at_3, \quad (1)$$

где  $t_3$  – искомое время опоздания находчивого пассажира.

Для равноускоренного движения предпоследнего вагона (Рис. 1) можем записать

$$l = v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2}, \quad (2)$$

где  $l$  – длина вагона,  $v_0$  – скорость электрички в момент появления пассажира на платформе

$$v_0 = v = at_3. \quad (3)$$

Соответственно, для равноускоренного движения двух вагонов (последнего и предпоследнего) получим уравнение

$$2l = v_0(t_1 + t_2) + \frac{a(t_1 + t_2)^2}{2}. \quad (4)$$

Подставляя (2) в (4), получим равенство

$$2l = 2(v_0 t_1 + \frac{at_1^2}{2}) = v_0(t_1 + t_2) + \frac{a(t_1 + t_2)^2}{2}, \quad (5)$$

из которого после преобразований находим

$$\frac{v_0}{a} = \frac{(t_1 + t_2)^2 - 2t_1^2}{2(t_1 - t_2)} = \frac{t_2^2 + 2t_1 t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)}. \quad (6)$$

Из (3) следует, что время опоздания пассажира как раз и равно полученному отношению (6)

$$t_3 = \frac{v_0}{a} = \frac{(t_1 + t_2)^2 - 2t_1^2}{2(t_1 - t_2)} = \frac{t_2^2 + 2t_1 t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)}. \quad (7)$$

Можно решать задачу несколько иначе. Вместо (4) записать уравнение равноускоренного движения последнего вагона

$$l = (v_0 + at_1)t_2 + \frac{at_2^2}{2}. \quad (8)$$

Приравнявая (2) и (8), получим, естественно, тот же ответ

$$\frac{v_0}{a} = \frac{t_2^2 + 2t_1 t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)} = \frac{(t_1 + t_2)^2 - 2t_1^2}{2(t_1 - t_2)}. \quad (9)$$

Расчет по данным условия даёт

$$t_3 = \frac{(6,6+4,4)^2 - 2 \cdot 6,6^2}{2 \cdot (6,6 - 4,4)} \text{ (с)} = 7,7 \text{ с}. \quad (10)$$

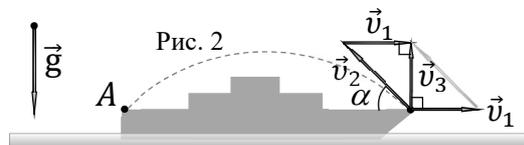
В соответствии с правилами округления (см. данные условия) окончательный ответ приводим с точностью до двух значащих цифр.

Забавная «мораль» задачи: даже если вы все же опоздали на электричку – не расстраивайтесь и тем более не сдавайтесь! Проведите небольшую «лабораторную» работу с убегающей электричкой, и вы точно узнаете, сколько времени вам не хватило для счастья. Не забудьте про выводы ... ☺

**9-2. «Гибкая траектория»** Скорость  $\vec{v}_3$  камешка относительно берега (неподвижной системы отсчета) по закону сложения скоростей равна векторной сумме скорости  $\vec{v}_1$  катера и скорости камешка  $\vec{v}_2$  относительно катера

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \quad (1)$$

Для того, чтобы в неподвижной (лабораторной) системе отсчета, связанной с берегом, движение камешка в процессе полёта было прямолинейным (вертикально вверх, а затем вниз!), необходимо, чтобы вектор  $\vec{v}_3$  (Рис. 2) его скорости относительно земли был вертикален (треугольник скоростей ( $\vec{v}_2$ ;  $\vec{v}_1$ ;  $-\vec{v}_3$ ) – прямоугольный).



Из треугольника скоростей следует, что в системе отсчета, связанной с берегом начальная скорость камешка  $v_3$  (катет прямоугольного треугольника) направлена вертикально вверх и равна

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 - v_1^2}. \quad (2)$$

Для угла бросания  $\alpha$  камешка относительно катера опять же из прямоугольного треугольника скоростей

$$v_2 \cos \alpha = v_1 \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{v_1}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{v_1}{v_2}\right). \quad (3)$$

Расчет по формуле (3) даёт

$$\alpha = \arccos\left(\frac{5,0}{15}\right) = \{70,52877937\}^1 = 71^\circ. \quad (4)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) окончательный ответ приводим с точностью до двух значащих цифр.

Интересно, что форма траектории камешка разная в различных системах отсчета (подвижной и неподвижной), т.е. является величиной относительной. Действительно, относительно катера – это парабола, тогда как относительно берега – прямая линия (отрезок). Вот уж, действительно, гибкая траектория!

**9-3. «Круговое сопротивление»** Сопротивление  $R_0$  однородной проволоки зависит от её длины  $l_0$  и площади поперечного сечения  $S$

$$R_0 = \rho \frac{l_0}{S}, \quad (1)$$

где  $\rho$  – удельное электрическое сопротивление материала, из которого она изготовлена. Из (1) следует, что если отрезать кусок проволоки длиной  $l$ , то его сопротивление  $R$  будет прямо пропорционально этой длине

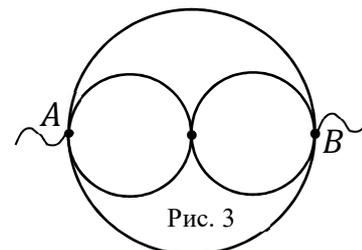
$$R \sim l. \quad (2)$$

Как следует из Рис. 3, проволоку разрезали на три куска: один побольше (большая окружность) и два поменьше (маленькие окружности). Длина проволоки при этом не изменилась, следовательно, можем записать

$$l_0 = 2\pi r + 2\pi r + 2\pi(2r) = 8\pi r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{l_0}{8\pi}, \quad (3)$$

где  $r$  – радиус меньшей окружности.

Используя (2), получаем, что сопротивления различных участков проволоки будут равны



<sup>1</sup> – здесь и далее: в фигурных скобках представлены (без размерности!) показания инженерного калькулятора (например, CASIO fx-991EX (CLASSWIZ)) при правильном расчёте.

$$R_{ACB} = \frac{\pi(2r)}{l_0} R_0 = \frac{R_0}{4}$$

$$R_{ADF} = \frac{\pi(r)}{l_0} R_0 = \frac{R_0}{8} \quad (4)$$

Эквивалентная схема цепи представлена на Рис. 4, сопротивление которой

$$R_{AB} = \frac{R_0}{16} = 1,0 \text{ Ом} . \quad (5)$$

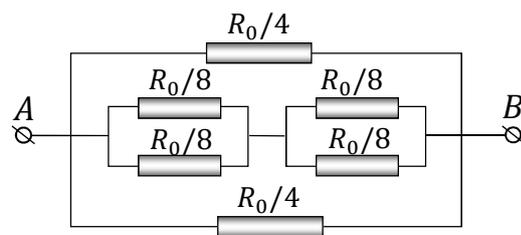


Рис. 4

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) окончательный ответ приводим с точностью до двух значащих цифр.

**9-4. «Горячая насадка»** Механизм работы «дедовского» метода прост и оригинален – «работает» явление теплового расширения (сжатия) – при нагревании линейные размеры тел незначительно увеличиваются, а при охлаждении – незначительно уменьшаются.

Действительно, нагретый до температуры  $t_1$  полый цилиндр А (Рис. 5) немного увеличивает свой внутренний радиус  $r$ . Охлажденный до температуры  $t_2$  вал, наоборот, немного уменьшает свой радиус  $r$ . Образовавшийся при этом небольшой «зазор в радиусах» (на рисунке не отмечен) позволяет насадить цилиндр на вал достаточно легко.

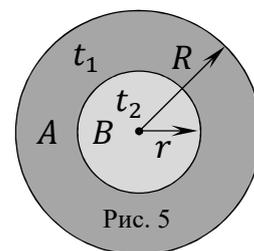


Рис. 5

При остывании цилиндра его внутренний радиус начинает уменьшаться, что приводит к сильному обжатию вала и, соответственно, увеличению механического напряжения между ними.

Кроме того, вал при нагревании будет увеличивать свой радиус, т.е. усиливать эффект прижимания цилиндра к валу. В итоге, сила сжатия цилиндра и вала становится настолько большой, что возникающие силы трения покоя «намертво» фиксируют цилиндр на валу без всякого клеящего средства! Понятно, что для снятия цилиндра с вала следует провести процесс в обратном направлении – вновь нагреть цилиндр и охладить вал.

Пусть высота цилиндра (и длина вала) равна  $l$ , тогда его масса  $m_1$  равна

$$m_1 = \rho(\pi R^2 - \pi r^2)l , \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность стали.

Соответственно, для массы вала  $m_2$  получаем

$$m_2 = \rho \pi r^2 l . \quad (2)$$

Поскольку (по условию) потерями теплоты в окружающее пространство можно пренебречь, то уравнение теплового баланса примет вид

$$Q^{\leftarrow} = Q^{\rightarrow} , \quad (3)$$

где  $Q^{\leftarrow}$  – количество теплоты, полученное холодным валом, а  $Q^{\rightarrow}$  – количество теплоты, отданное горячим полым цилиндром.

Для нагревания холодного вала можем записать

$$Q^{\leftarrow} = c m_2 (t^* - t_2) , \quad (4)$$

где  $c$  – удельная теплоёмкость стали,  $m_2$  – масса вала.

Аналогично для горячего полого цилиндра

$$Q^{\rightarrow} = c m_1 (t_1 - t^*) , \quad (5)$$

где  $m_1$  – масса полого цилиндра.

Подставляя (4) и (5) в (3), получим для равновесной температуры системы

$$t^* = \frac{c m_1 t_1 + c m_2 t_2}{c m_1 + c m_2} = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} . \quad (6)$$

Из (6) с учетом (1) и (2), найдем

Возможные решения задач.

$$t^* = \frac{\rho(\pi R^2 - \pi r^2) l t_1 + \rho \pi r^2 l t_2}{\rho(\pi R^2 - \pi r^2) l + \rho \pi r^2 l} = \frac{(R^2 - r^2) t_1 + r^2 t_2}{R^2} = t_1 - \frac{(t_1 - t_2) r^2}{R^2}. \quad (7)$$

Расчет по формуле (10) с приведенными в условии параметрами даёт значение

$$t^* = \left( 250 - \frac{(250 - (-50,0)) \cdot 10,0^2}{15,0^2} \right) \text{°C} = \{116,6666667\} = 117 \text{°C}. \quad (8)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) все окончательные ответы приводим с точностью до трёх значащих цифр.

**9-5. «Оптические гонки»** Пусть размер стороны квадратной клеточки на Рис. 6 равен  $a$ . Тогда фокусное расстояние линзы будет  $F = 3a$ , расстояния от жуков до линзы будут равны, соответственно,

$$\begin{aligned} d_A &= 6a = 2F \\ d_B &= 4a = \frac{4}{3}F. \end{aligned} \quad (1)$$

За малый промежуток времени  $\Delta t$  жуки со скоростью  $v$  проползут одинаковые расстояния  $AC$  и  $BD$  (см. Рис. 6), причем

$$AC = BD = v\Delta t. \quad (2)$$

Построим изображения  $A'C'$  и  $B'D'$  отрезков  $AC$  и  $BD$  в тонкой линзе (см. Рис. 6).

Поскольку жук  $A$  находится на двойном фокусном расстоянии от линзы, то его изображение  $A'C'$  также будет на двойном фокусном расстоянии от линзы. При этом увеличение линзы будет равно единице ( $\Gamma = \frac{6a}{6a} = 1$ ), т.е.

$$A'C' = AC. \quad (3)$$

Соответственно, скорость  $v_A$  изображения жука  $A$  будет равна скорости  $v$  жуков и направлена «вниз»

$$v_A = \frac{A'C'}{\Delta t} = \frac{AC}{\Delta t} = \frac{v\Delta t}{\Delta t} = v = 10 \text{ см/с}. \quad (4)$$

Как следует из построения, расстояние от линзы до изображения  $B'D'$  жука  $B$  равно  $12a$ . Следовательно, увеличение линзы в этом случае

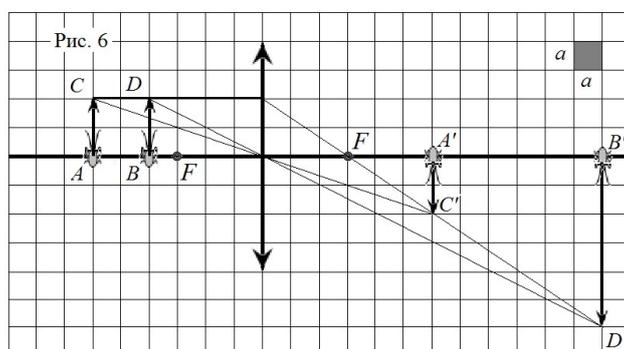
$$\Gamma = \frac{12a}{4a} = 3 \Rightarrow B'D' = 3BD. \quad (5)$$

Повторя рассуждения, аналогичные (4), найдем скорость изображения  $v_B$

$$v_B = \frac{B'D'}{\Delta t} = \frac{3BD}{\Delta t} = \frac{3v\Delta t}{\Delta t} = \Gamma \cdot v_A = 3 \cdot v_A = 30 \text{ см/с}, \quad (6)$$

которая также направлена «вниз».

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) все окончательные ответы приводим с точностью до двух значащих цифр.



## 10 класс

**10-1. «Удачный бросок»** Для того, чтобы в неподвижной системе отсчета, связанной с берегом, движение камешка в процессе полёта было прямолинейным (вертикально вверх, а затем вниз!), необходимо, чтобы вектор  $\vec{v}_3$  (Рис. 7) его скорости относительно земли

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \quad (1)$$

был вертикален (треугольник скоростей  $(\vec{v}_2; \vec{v}_1; -\vec{v}_3)$  – прямоугольный).

В этом случае из треугольника скоростей следует, что в неподвижной системе отсчета, связанной с берегом, начальная скорость камешка  $v_3$  (катет прямоугольного треугольника) направлена вертикально вверх и равна

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 - v_1^2}. \quad (2)$$

Соответственно, время движения камешка вверх и вниз в данной системе отсчета равно

$$t = \frac{2v_3}{g} = \frac{2\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{g}. \quad (3)$$

Длину катера найдем, зная его скорость и время движения (3)

$$l = v_1 t = \frac{2v_1 \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{g}. \quad (4)$$

Расчет по формуле (4) даёт ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ )

$$l = \left( \frac{2 \cdot 5,00 \cdot \sqrt{15,0^2 - 5,00^2}}{9,81} \right) \text{ м} = \{14,41604039\} = 14,4 \text{ м}. \quad (5)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия и справочные данные) окончательный ответ приводим с точностью до трёх значащих цифр.

Заметим, что решать задачу можно и в подвижной системе отсчета, связанной с катером, движущимся равномерно. В этой системе отсчета скорость катера  $\vec{v}_1$  «незаметна» (никак не проявляет себя!) и, соответственно, не влияет на ответ.

Камешек при этом движется по параболе, нужно просто найти дальность  $l$  его полёта. Для этого вычислим угол бросания  $\alpha$  камешка относительно катера из прямоугольного треугольника скоростей (1)

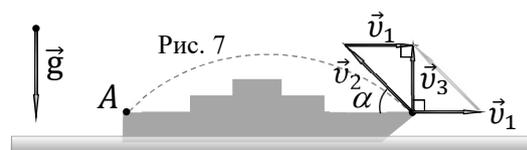
$$v_2 \cos \alpha = v_1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_2}; \quad \alpha = 70,53^\circ. \quad (6)$$

Длина катера в этом случае будет равна дальности полёта камешка

$$l = \frac{v_2^2}{g} \sin(2\alpha) = \frac{v_2^2}{g} 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \frac{v_2^2}{g} \cdot \frac{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} = \frac{2v_1 \sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{g}. \quad (7)$$

Как видим из (4) и (7), решение задачи в различных ИСО (инерциальных системах отсчета: «ИСО-берег» или «ИСО-лодка») приводит к одному и тому же ответу, в полном соответствии с принципом относительности Галилея, который утверждает, что все ИСО «тождественны» в смысле описания механических явлений природы.

Действительно, не смотря на то, что траектории камешка в разных ИСО различные (относительная характеристика) – длина лодки и время движения камня одинаковы (абсолютные характеристики). Интересно, что в механике Эйнштейна (СТО) длина и время также относительны, но в рамках физики 10 класса «господствует» теория сэра Ньютона. ☺



**10-2. «Массовые отношения»** При вращении системы шарики отклоняются от вертикали так, что нити длинами  $l_1$  и  $l_2$  образуют с ней некоторые углы  $\alpha$  и  $\beta$ , соответственно (Рис. 8). При этом шарики равномерно движутся по горизонтальным окружностям, радиусы которых равны  $r_1$  и  $r_2$ , соответственно (см. Рис. 8)

$$r_1 = l_1 \sin \alpha, \quad (1)$$

$$r_2 = l_1 \sin \alpha + l_2 \sin \beta. \quad (2)$$

Согласно второму закону Ньютона для второго (дальнего) шарика (см. Рис. 8) можем записать

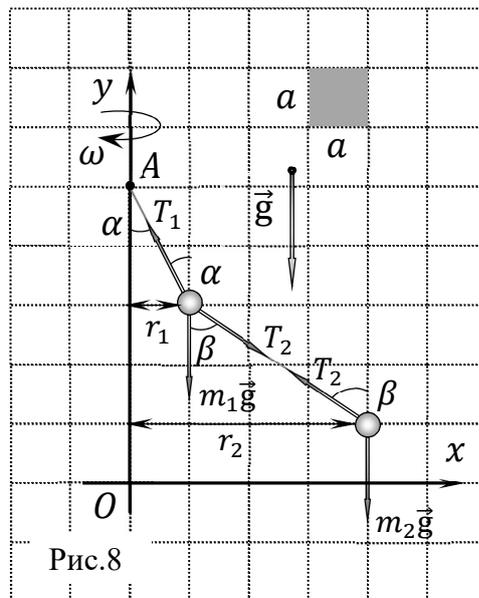
$$Oy: \quad m_2 g = T_2 \cos \beta, \quad (3)$$

$$Ox: \quad m_2 a_2 = m_2 \omega^2 r_2 = T_2 \sin \beta, \quad (4)$$

Аналогично для движения первого (ближнего) шарика (см. Рис. 12)

$$Oy: \quad m_1 g = T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta, \quad (5)$$

$$Ox: \quad m_1 a_1 = m_1 \omega^2 r_1 = T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \beta, \quad (6)$$



Из (3) найдем силу натяжения  $T_2$  нижней нити

$$T_2 = \frac{m_2 g}{\cos \beta}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5) получим выражение для силы натяжения  $T_1$  верхней нити

$$T_1 = \frac{(m_1 + m_2) g}{\cos \alpha}. \quad (8)$$

Используя (8) и (7), получим

$$\eta = \frac{T_1}{T_2} = \frac{(m_1 + m_2) g}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \beta}{m_2 g} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_2} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = (n + 1) \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}. \quad (9)$$

Из (9) находим искомую величину

$$n = \eta \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} - 1. \quad (10)$$

Из рисунка, используя теорему Пифагора, находим необходимые параметры ( $a$  – длина стороны масштабной клеточки (см. Рис. 8)):

$$\cos \alpha = \frac{2a}{\sqrt{5}a} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos \beta = \frac{2a}{\sqrt{13}a} = \frac{2}{\sqrt{13}}. \quad (11)$$

Расчет по (10) с необходимой точностью даёт

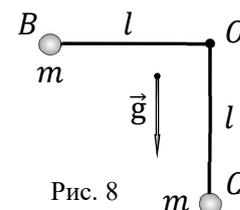
$$n = 5,58 \sqrt{\frac{13}{5}} - 1 = \{7,997479647\} = 8,00 \quad (10)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) окончательный ответ приводим с точностью до трёх значащих цифр.

**10-3. «Уголок Пифагора»** Рассмотрим систему в начальном и конечном механических состояниях. Примем за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии уровень начального положения шарика  $C$  системы (Рис. 8).

Тогда начальная потенциальная энергия  $E_1^n$  системы будет определяться только потенциальной энергией  $E_B^n$  шарика  $B$

$$E_1^n = E_B^n = mgl. \quad (1)$$



В качестве конечного состояния рассмотрим прохождение шариками положения равновесия системы, в котором они оба находятся на одном горизонтальном уровне  $h$  (Рис. 9). Поскольку в этот момент центр масс шариков, находящийся на середине линии,

соединяющей шарик, занимает низшее положение, то скорость (и кинетическая энергия) шариков будет иметь максимальное значение  $v_{max}$ .

При таком положении центр масс системы (и каждый из шариков!) будет находиться на высоте  $h = l\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , а потенциальная энергия системы примет значение

$$E_2^n = 2mgl\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad (2)$$

Запишем закон сохранения энергии для системы в этот момент времени с учетом (1) и (2)

$$2\frac{mv_{max}^2}{2} + 2mgl\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = mgl. \quad (3)$$

Из (3) находим максимальную скорость шариков

$$v_{max} = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)gl}. \quad (4)$$

Поскольку на шарик  $C$  действует только одна сила со стороны стержня (сила тяжести уже учтена в потенциальной энергии, а сопротивлением воздуха, по условию, пренебрегаем), то её работа и будет определять приращение механической энергии шарика.

Таким образом, искомая работа  $A_C$ , совершенная силой, действующей на нижний шарик  $C$  со стороны стержня к моменту достижения им максимальной скорости, равна приращению механической энергии этого шарика

$$A_C = \frac{mv_{max}^2}{2} + mgl\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{mgl}{2}. \quad (5)$$

Расчет по формуле (5) дает

$$A_C = \frac{0,115 \cdot 9,81 \cdot 0,365}{2} = \{0,205887375\} = 0,206 \text{ Дж} = 206 \text{ мДж}. \quad (6)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) все окончательные ответы приводим с точностью до трёх значащих цифр.

Интересно, (от школьников не требуется), что такая же по модулю, но противоположная по знаку работа силы  $A_B = -\frac{mgl}{2}$ , действующей на второй шарик. Закон сохранения энергии никто не отменял!

Заметим, что прямой подсчет работы силы «по определению» не такая уж и простая задача – сила меняется вдоль траектории достаточно сложным образом! Однако, как и положено «настоящим олимпиадникам», мы получили ответ (5) «хитрым, суворовским маневром ...» ☺

#### 10-4. «Подвижное изображение»

Согласно формуле тонкой линзы, расстояние  $d$  от жучка до линзы и расстояние  $f$  от линзы до его действительного изображения связаны соотношением (Рис. 10)

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \quad (1)$$

где  $F$  – фокусное расстояние тонкой собирающей линзы.

Из (1) найдем

$$f = \frac{dF}{d-F} = 2,5 F. \quad (2)$$

Возможные решения задач.

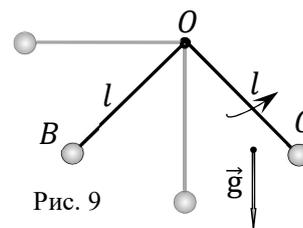


Рис. 9

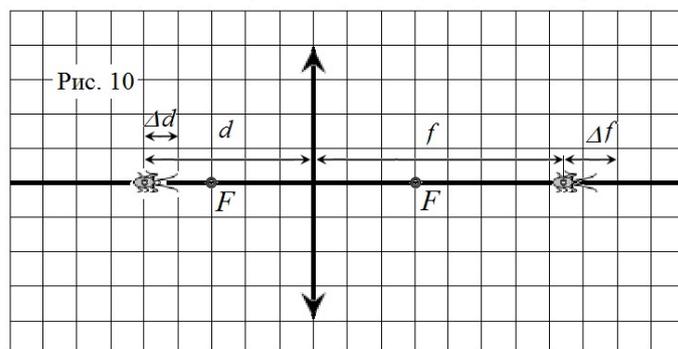


Рис. 10

Пусть за малый промежуток времени  $\Delta t$  жучок переместился на малое расстояние  $\Delta d$  к линзе, а его изображение сместилось на  $\Delta f$  от линзы. Тогда скорости жучка и изображения по определению будут равны

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t}, \quad u = \frac{\Delta f}{\Delta t}. \quad (3)$$

Согласно формуле тонкой линзы для нового положения жучка (см. Рис. 10)

$$\frac{1}{d-\Delta d} + \frac{1}{f+\Delta f} = \frac{1}{f}. \quad (4)$$

Используя математическую подсказку из условия, перепишем выражение в виде

$$\frac{1}{d-\Delta d} = \frac{1}{d(1-\frac{\Delta d}{d})} \approx \frac{1}{d} \left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right) = \frac{1}{d} + \frac{\Delta d}{d^2}. \quad (5)$$

Аналогично

$$\frac{1}{f+\Delta f} = \frac{1}{f(1+\frac{\Delta f}{f})} \approx \frac{1}{f} \left(1 - \frac{\Delta f}{f}\right) = \frac{1}{f} - \frac{\Delta f}{f^2}. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получим равенство

$$\frac{1}{d} + \frac{\Delta d}{d^2} + \frac{1}{f} - \frac{\Delta f}{f^2} = \frac{1}{f}, \quad (7)$$

которое, с учетом (1), можно переписать в виде

$$\frac{\Delta d}{d^2} = \frac{\Delta f}{f^2}. \quad (8)$$

Разделив обе части (8) на  $\Delta t$ , найдем искомое значение скорости изображения жучка

$$u = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f^2}{d^2} \cdot \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f^2}{d^2} v. \quad (9)$$

Окончательно, с учётом (2), получим, что действительное изображение жучка движется в направлении «от линзы» со скоростью

$$u = \frac{\left(\frac{dF}{d-F}\right)^2}{d^2} v = \frac{F^2}{(d-F)^2} v. \quad (10)$$

Расчет по формуле (10) даёт

$$u = \frac{F^2}{(d-F)^2} v = \frac{9}{4} v = 9,0 \text{ см/с}. \quad (11)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) все окончательные ответы приводим с точностью до двух значащих цифр.

**10-5. «Смещение газов»** Через некоторое время после смешения газов система придет в состояние теплового (термодинамического) равновесия при установившихся температуре  $t^*$  ( $t_1 < t^* < t_2$ ) и давлении  $p^*$  (Рис. 11).

Поскольку (по условию) удельная теплоёмкость  $c$  газа в рассматриваемом термодинамическом процессе остается постоянной, то в рамках данной упрощенной модели процесса можно воспользоваться классическим уравнением теплового баланса

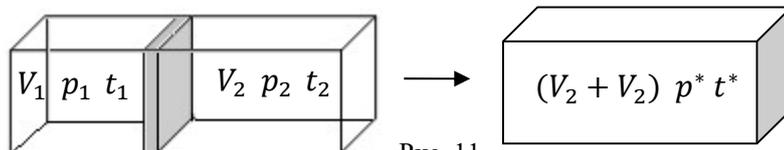


Рис. 11

$$Q^{\leftarrow} = Q^{\rightarrow}, \quad (1)$$

где  $Q^{\leftarrow}$  – количество теплоты, полученное менее нагретым газом, а  $Q^{\rightarrow}$  – количество теплоты, отданное более нагретым газом.

Для «холодного» газа в первом сосуде можем записать

$$Q^{\leftarrow} = cm_1(t^* - t_1), \quad (2)$$

Возможные решения задач.

где  $m_1$  – масса идеального газа в первом сосуде.

Аналогично для «горячего» газа во втором сосуде

$$Q^{\wedge} = cm_2(t_2 - t^*), \quad (3)$$

где  $m_2$  – масса идеального газа во втором сосуде.

Подставляя (2) и (3) в (1), получим для равновесной температуры системы

$$t^* = \frac{cm_1t_1 + cm_2t_2}{cm_1 + cm_2} = \frac{m_1t_1 + m_2t_2}{m_1 + m_2}. \quad (4)$$

Запишем уравнение состояния идеального газа в форме Клапейрона – Менделеева для каждого из сосудов

$$\begin{aligned} p_1V_1 &= \frac{m_1}{M}RT_1 \\ p_2V_2 &= \frac{m_2}{M}RT_2 \end{aligned}, \quad (5)$$

где  $M$  – молярная масса данного газа,  $R$  – молярная газовая постоянная,  $T_1$  и  $T_2$  – абсолютные (термодинамические) температуры газов по шкале Кельвина в каждом из сосудов.

Выразим из (5) массы идеальных газов в каждом из сосудов

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{p_1V_1M}{T_1R} \\ m_2 &= \frac{p_2V_2M}{T_2R} \end{aligned}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4), получим для равновесной температуры системы

$$t^* = \frac{\frac{p_1V_1M}{T_1R}t_1 + \frac{p_2V_2M}{T_2R}t_2}{\frac{p_1V_1M}{T_1R} + \frac{p_2V_2M}{T_2R}} = \frac{\frac{p_1V_1}{T_1}t_1 + \frac{p_2V_2}{T_2}t_2}{\frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2}} = \frac{p_1V_1T_2t_1 + p_2V_2T_1t_2}{p_1V_1T_2 + p_2V_2T_1}. \quad (7)$$

Расчет по формуле (7) с учетом того, что  $T_1 = 300$  К, а  $T_2 = 400$  К даёт

$$t^* = \frac{p_1V_1T_2t_1 + p_2V_2T_1t_2}{p_1V_1T_2 + p_2V_2T_1} = \{98,48676171\} = 98^\circ\text{C} = 371 \text{ К}. \quad (8)$$

Подставляя (6) и (7) в уравнение Клапейрона – Менделеева найдем искомое значение установившегося давления

$$p^*(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{M}RT^* \Rightarrow p^* = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2}, \quad (9)$$

$$p^* = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = \{264347,8261\} = 2,6 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0,26 \text{ МПа}. \quad (10)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия и справочные данные) все окончательные ответы приводим с точностью до двух значащих цифр, поскольку «худшие» по точности данные содержат две значащие цифры.

## 11 класс.

**11-1. «Ускорение ускорения»** При движении кольца по горизонтальной поверхности скорость  $\vec{v}$  любой его точки можно найти как сумму скоростей  $\vec{v}_1$  поступательного (вместе с центром) и вращательного  $\vec{v}_2$  (вокруг центра) движений

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2. \quad (1)$$

Причем, при движении без проскальзывания точка  $C$  кольца покоится относительно земли (Рис. 12), следовательно, модули этих скоростей, направленных в противоположные стороны, должны быть одинаковыми

$$v_1 = v_2. \quad (2)$$

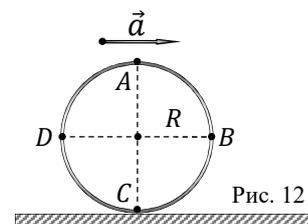


Рис. 12

Поскольку кольцо ускоряется, то скорость  $v_1$  его поступательного движения (скорость точки  $O$ ) вместе со скоростью  $v_2$  увеличивается прямо пропорционально времени движения

$$v_1 = v_2 = at . \quad (3)$$

По определению ускорение материальной точки равно (для малого  $\Delta t$ )

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 . \quad (4)$$

Как следует из (4), для нахождения искомого ускорения  $\vec{a}$  любой точки кольца следует сложить (векторно!) её ускорения для поступательного  $\vec{a}_1$  и вращательного  $\vec{a}_2$  движений.

Для поступательного движения все предельно просто – ускорения  $\vec{a}_1$  всех точек кольца одинаковы (как по модулю, так и по направлению!) и равны ускорению центра кольца (Рис. 13)

$$\vec{a}_1 = \vec{a} . \quad (5)$$

Для вычисления ускорения  $\vec{a}_2$  материальной точки при неравномерном вращательном движении следует учесть как её центростремительное (нормальное) ускорение  $\vec{a}_3$ , направленное вдоль радиуса, так и касательное (тангенциальное) ускорение  $\vec{a}_4$ , которое перпендикулярно центростремительному, и направлено по касательной в данной точке (см. Рис. 13)

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_3 + \vec{a}_4 . \quad (6)$$

Если мгновенная скорость центра кольца  $v_1$ , то для модуля центростремительного ускорения в данный момент времени имеем

$$a_3 = \frac{v_1^2}{R} . \quad (7)$$

Кроме того, из (2) следует, что при движении кольца без проскальзывания касательное ускорение  $a_4$  точки  $C$ , направленное влево (см. Рис. 13), равно по модулю ускорению центра кольца, направленному вправо

$$a_4 = a_1 = a . \quad (8)$$

Направления всех ускорений изображены на рисунке 13.

Таким образом, искомое ускорение  $\vec{a}_B$  точки  $B$  определяется векторной суммой

$$\vec{a}_B = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 . \quad (9)$$

Из рисунка 13, используя теорему Пифагора, находим, что полное ускорение точки  $B$  равно

$$a_B = \sqrt{a_4^2 + (a_1 - a_3)^2} = \sqrt{a_4^2 + \left(a_1 - \frac{v_1^2}{R}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \left(a - \frac{v_1^2}{R}\right)^2} . \quad (10)$$

С учётом (3) выражение (10) примет вид

$$a_B = a \sqrt{1 + \left(1 - \frac{at^2}{R}\right)^2} . \quad (11)$$

Поскольку требуется найти вектор ускорения, то, помимо модуля вектора, необходимо указать его направление, т.е. найти, например, угол  $\alpha$ , образованный данным вектором с горизонтом.

Из прямоугольного треугольника ускорений (см. Рис. 13), найдем

$$\tan \alpha = \frac{a_4}{a_1 - a_3} = \frac{a}{a - \frac{v^2}{R}} = \frac{R}{R - at^2} . \quad (12)$$

Таким образом, ускорение  $\vec{a}_B$  точки  $B$  кольца будет вертикально (направлено вниз) при выполнении условия

$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \tan \alpha = \frac{a_4}{a_1 - a_3} = \infty \Rightarrow a_1 = a = a_3 . \quad (13)$$

Из (12) следует, что это произойдет в момент времени

$$a = a_3 = \frac{v^2}{R} = \frac{(at)^2}{R} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{R}{a}} = 0,64 \text{ с} . \quad (14)$$

Искомое ускорение  $\vec{a}_A$  точки  $A$  определяется векторной суммой

Возможные решения задач.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4. \quad (15)$$

Используя теорему Пифагора (Рис. 13), находим, что полное ускорение  $a_A$  точки  $A$  равно по модулю

$$a_A = \sqrt{(a_1 + a_4)^2 + a_3^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \quad (16)$$

С учетом (13) получим

$$a_A = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{aR}{R}\right)^2} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}. \quad (17)$$

Расчет производим с точностью до двух значащих цифр

$$a_A = 2,4 \cdot \sqrt{5} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = \{5,366563146\} = 5,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (18)$$

Поскольку требуется найти вектор ускорения, то, помимо модуля вектора, необходимо указать его направление, т.е. найти, например, угол  $\alpha$ , образованный данным вектором с горизонтом.

Для точки  $A$  из прямоугольного треугольника ускорений (см. Рис. 13), найдем

$$\tan \alpha = \frac{a_3}{a_1 + a_4} = \frac{a}{a+a} = 0,5 \Rightarrow \alpha = \{26,56505118\} = 27^\circ. \quad (19)$$

Как следует из (19) вектор  $\vec{a}_A$  в рассматриваемый момент времени направлен «вперед и вниз».

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) окончательные ответы приводим с точностью до двух значащих цифр.

**11-2. «Двойной конический маятник»** При вращении системы шарики отклоняются от вертикали так, что нити длинами  $l_1$  и  $l_2$  образуют с ней некоторые углы  $\alpha$  и  $\beta$ , соответственно (Рис. 14). При этом шарики равномерно движутся по горизонтальным окружностям, радиусы которых равны  $r_1$  и  $r_2$ , соответственно (см. Рис. 14)

$$r_1 = l_1 \sin \alpha, \quad (1)$$

$$r_2 = l_1 \sin \alpha + l_2 \sin \beta. \quad (2)$$

Согласно второму закону Ньютона для второго (дальнего) шарика (см. Рис. 12) можем записать

$$Oy: \quad m_2 g = T_2 \cos \beta, \quad (3)$$

$$Ox: \quad m_2 a_2 = m_2 \omega^2 r_2 = T_2 \sin \beta, \quad (4)$$

Аналогично для движения первого (ближнего) шарика (см. Рис. 14)

$$Oy: \quad m_1 g = T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta, \quad (5)$$

$$Ox: \quad m_1 a_1 = m_1 \omega^2 r_1 = T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \beta, \quad (6)$$

Из (3) найдем силу  $T_2$  натяжения нижней нити

$$T_2 = \frac{m_2 g}{\cos \beta}. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (5) получим выражение для силы натяжения  $T_1$  верхней нити

$$T_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{\cos \alpha}. \quad (8)$$

Используя (8), (6) и (4), придём к равенству

$$\omega^2 = \frac{(m_1 + m_2)g \tan \alpha}{m_1 r_1 + m_2 r_2}. \quad (9)$$

Аналогично выразим  $\omega^2$  из (4) с учетом (7)

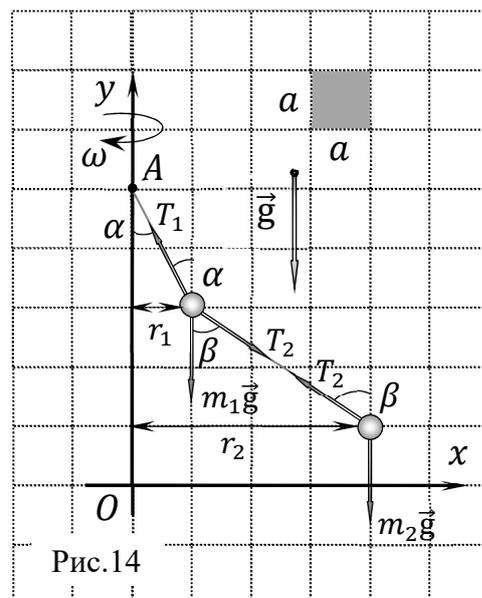


Рис.14

$$\omega^2 = \frac{m_2 g \tan \beta}{m_2 r_2} = \frac{g \tan \beta}{r_2}. \quad (10)$$

Приравняв выражения (9) и (10) для  $\omega^2$  получаем равенство

$$\frac{(m_1 + m_2) g \tan \alpha}{m_1 r_1 + m_2 r_2} = \frac{g \tan \beta}{r_2}, \quad (11)$$

из которого после преобразований найдем

$$m_2 = \frac{m_1 (r_2 \tan \alpha - r_1 \tan \beta)}{r_2 (\tan \beta - \tan \alpha)}. \quad (12)$$

Из рисунка 14 находим необходимые параметры ( $a$  – длина стороны масштабной клеточки):

$$r_1 = a; r_2 = 4a; \tan \alpha = \frac{1}{2}; \tan \beta = \frac{3}{2}. \quad (13)$$

Расчет по (12) с необходимой точностью даёт

$$m_2 = \frac{80 \cdot (4 \cdot 0,5 - 1 \cdot 1,5)}{4(1,5 - 0,5)} \text{ (г)} = 10 \text{ г}. \quad (14)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) окончательный ответ приводим с точностью до двух значащих цифр.

**11-3. «Термодинамическая геометрия»** По определению термический коэффициент полезного действия  $\eta$  цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_1}, \quad (1)$$

где  $A$  – работа газа за цикл,  $Q_1$  – количество теплоты, полученной от нагревателя.

Работа газа за цикл равна площади фигуры  $ABCD$ , т.е. площади, ограниченной циклом (Рис. 15, а).

В нашем случае – это сумма площадей четверти окружности  $ABD$  и треугольника  $BCD$

$$A = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{\pi(5V_0)(5p_0)}{4} + \frac{(5p_0)(3V_0)}{2} = \frac{5(5\pi+6)}{4} p_0 V_0. \quad (2)$$

Нагреватель в данном цикле работает на участке  $ABC$ , следовательно

$$Q_1 = Q_{1AB} + Q_{1BC}. \quad (3)$$

Далее запишем первое начало термодинамики

$$Q_{ABC} = \Delta U_{ABC} + A_{ABC}, \quad (4)$$

где  $\Delta U_{ABC}$  – изменение внутренней энергии идеального одноатомного газа в процессе  $ABC$ , а  $A_{ABC}$  – работа газа в этом же процессе.

Поскольку внутренняя энергия является функцией состояния термодинамической системы (зависит только от текущих параметров), то для  $\Delta U_{ABC}$  имеем

$$\Delta U_{ABC} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T_{ABC} = \frac{3}{2} \nu R (T_C - T_A) = \frac{3}{2} (\nu R T_C - \nu R T_A), \quad (5)$$

где  $R$  – молярная (универсальная) газовая постоянная.

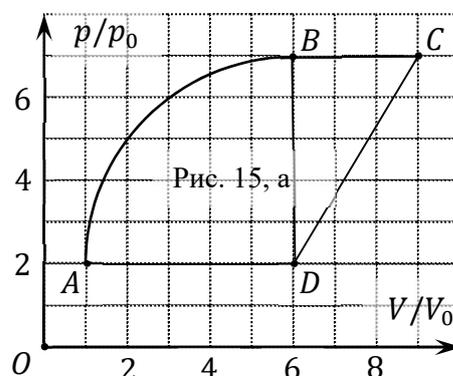
Согласно уравнению состояния идеального газа в форме Клапейрона – Менделеева для точек  $A$  и  $C$  на приведенной диаграмме можем записать

$$p_A V_A = \frac{m}{M} R T_A = \nu R T_A = 2 p_0 V_0, \quad (6)$$

$$p_C V_C = \frac{m}{M} R T_C = \nu R T_C = 7 p_0 9 V_0 = 63 p_0 V_0, \quad (7)$$

где  $\nu$  – количество вещества газа.

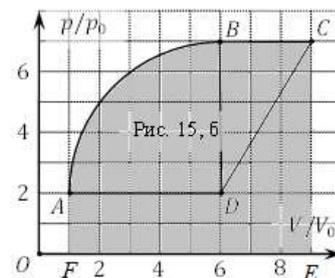
С учетом (6) и (7) равенство (5) переписывается в виде



$$\Delta U_{ABC} = \frac{3}{2}(vRT_C - vRT_A) = \frac{3}{2}(63 p_0 V_0 - 2 p_0 V_0) = \frac{3}{2}(61 p_0 V_0) = 91,5 p_0 V_0. \quad (8)$$

Для вычисления работы  $A_{ABC}$  необходимо найти площадь под графиком (до оси абсцисс!) процесса  $ABC$  (посчитать клеточки, ☺), что соответствует площади фигуры  $ABCEF$ , затонированной на диаграмме (Рис. 15, б)

$$A_{ABC} = \frac{\pi(5V_0)(5p_0)}{4} + 10p_0V_0 + 21p_0V_0 = \frac{25\pi+1}{4} p_0V_0. \quad (9)$$



Подставляя (8) и (9) в (4), получаем

$$Q_1 = \Delta U_{ABC} + A_{ABC} = 91,5 p_0 V_0 + \frac{25\pi+124}{4} p_0 V_0 = \frac{25\pi+490}{4} p_0 V_0. \quad (10)$$

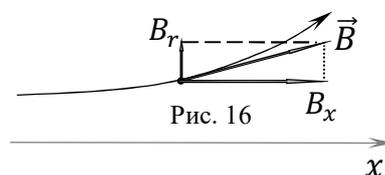
Окончательно с учетом (2) и (10) для термического коэффициента полезного действия  $\eta$  цикла получаем выражение

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{\frac{5(5\pi+6)}{4} p_0 V_0}{\frac{25\pi+490}{4} p_0 V_0} = \frac{5(5\pi+6)}{25\pi} = \{0,1909097889\} = 0,19 = 19 \%. \quad (11)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) окончательный ответ приводим с точностью до трёх значащих цифр.

Как видим КПД данного «придуманного» цикла меньше КПД циклов действующих (бензиновых и дизельных) автомобилей ((35 – 40)%), и уж тем более меньше КПД двигателя электромобиля «Tesla», который, по различным оценкам, составляет величину (70 – 90)% ! Теперь понятно, почему будущее – за электромобилями. ☺

**11-4. «Гантель в поле»** Разложим вектор индукции  $\vec{B}$  аксиально-симметричного магнитного поля в точке, где находится заряженный шарик, на две составляющие (Рис. 16):  $\vec{B}_x$  (вдоль оси  $Ox$ ) и  $\vec{B}_r$  (перпендикулярно оси  $Ox$ )



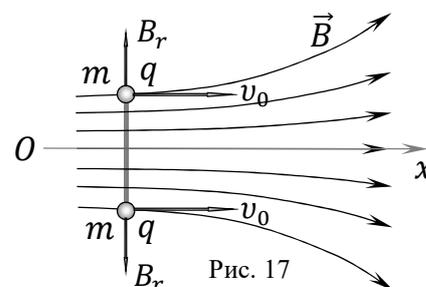
$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_r. \quad (1)$$

Сразу после влёта гантели в магнитное поле, на неё начинают действовать силы Ампера, связанные с  $\vec{B}_r$  и вращающие её вокруг оси  $Ox$ . Согласно правилу левой руки на верхний шарик действует сила Ампера, направленная «к нам», на нижний – «от нас».

Действие такой пары сил приведет к появлению некоторой скорости  $u$  вращательного движения каждого из шариков гантели вокруг оси  $Ox$ .

Заметим, что при наличии скорости  $u$  вращательного движения силы Ампера, связанные с  $\vec{B}_x$ , направлены вдоль стержня, равны по величине и противоположно направлены (растягивают стержень), и никак не влияют на движение центра масс гантели (Рис. 17).

А вот силы Ампера, возникающие из-за наличия скорости  $u$  и  $\vec{B}_r$ , начинают притормаживать гантель (уменьшать скорость  $u$  её поступательного движения)



$$F_x = -quB_r, \quad (2)$$

Запишем уравнение второго закона Ньютона для движения гантели массой  $2m$

$$2ma_x = 2m \frac{dv}{dt} = 2F_x = -2quB_r, \quad (3)$$

При этом сила Ампера  $F_\tau$ , разгоняющая круговое движение каждого шарика и направленная по касательной, будет равна

$$F_\tau = quB_r. \quad (4)$$

Запишем уравнения второго закона Ньютона для кругового движения шарика

$$m \frac{du}{dt} = F_\tau = quB_r \quad (5)$$

Как следует из (5), скорость  $u$  вращательного движения шарика растёт до тех пор, пока скорость  $v$  поступательного движения гантели не уменьшится до нуля (положительна), т.е. пока центр гантели не остановится (первая остановка).

Поскольку сила Ампера не совершает работы (её мощность равна нулю), то кинетическая энергия системы остается постоянной. Это означает, что, по мере уменьшения скорости  $v$  поступательного движения гантели, увеличивается скорость  $u$  её вращательного движения.

Соответственно, в момент остановки центра масс гантели ( $v = 0$ ) кинетическая энергия поступательного движения переходит в кинетическую энергию вращательного движения шариков (стержень легкий по условию, его энергию вращения не учитываем)

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mu_{max}^2}{2} \implies u_{max} = v_0. \quad (6)$$

Пусть центр гантели находится на расстоянии  $x$  от начальной точки, а его скорость равна  $v$ . Перепишем (5) в виде

$$m \frac{du}{dt} = quB_r = qB_r \frac{dx}{dt}. \quad (7)$$

Умножая обе части (7) на  $dt$  и проводя суммирование бесконечно малых в обеих частях, получим равенство

$$mu = qB_r x \implies u = \frac{qB_r}{m} x. \quad (8)$$

Как следует из (8), скорость  $u$  вращательного движения шариков прямо пропорциональна смещению  $x$  гантели от начального положения.

Подставляя (8) в (3), получим уравнение

$$a_x = -\frac{qB_r}{m} u = -\left(\frac{qB_r}{m}\right)^2 x = -\omega^2 x, \quad (9)$$

представляющее собой уравнение гармонических колебаний с циклической частотой  $\omega$  и периодом

$$\omega = \frac{qB_r}{m}, \quad (10)$$

$$T = \frac{2\pi}{qB_r}. \quad (11)$$

Таким образом, движение центра масс гантели до первой остановки (и назад!) является гармоническим, т.е. представляет собой «четверть» гармонического колебания, происходящего по закону синуса.

Используя (8) и (6), найдем амплитуду  $A$  данного колебания, которая и будет представлять собой максимальное смещение  $l_{max}$  центра гантели вдоль оси  $Ox$  от начального положения

$$u_{max} = v_0 = \omega x_{max} = \frac{qB_r}{m} x_{max} = \frac{qB_r}{m} A \implies A = l_{max} = \frac{mv_0}{qB_r}. \quad (12)$$

Расчёт по (12) с точностью до трёх значащих цифр даёт

$$l_{max} = \frac{64,3 \cdot 10^{-6} \cdot 3,14}{1,51 \cdot 10^{-3} \cdot 24,4 \cdot 10^{-3}} \text{ (м)} = \{5,479915319\} = 5,48 \text{ м}. \quad (13)$$

Искомая средняя скорость  $v_{cp}$  центра гантели на участке от момента попадания в магнитное поле до первой остановки рассчитывается как при гармонических колебаниях

$$v_{cp} = \frac{A}{T/4} = \frac{2v_0}{\pi}. \quad (14)$$

Расчёт по (14) даёт

$$v_{cp} = \left( \frac{2 \cdot 3,14}{3,14} \right) \frac{m}{c} = \{2\} = 2,00 \text{ м/с}. \quad (15)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия и справочные данные) окончательный ответ приводим с точностью до трёх значащих цифр.

**11-5. «Тепло резистору»** До замыкания ключа  $K$  в конденсаторе от внешнего источника запасена энергия электростатического поля

$$W_C = \frac{CU^2}{2}. \quad (1)$$

После замыкания ключа  $K$  (Рис. 18) по цепи пойдёт электрический ток, сила которого будет нелинейно уменьшаться со временем от максимального значения  $I_{max}$  до нуля по мере разрядки конденсатора. Пусть в некоторый момент сила тока через резистор  $R_1$  равна  $I_1$ . Поскольку резисторы  $R_2$  и  $R_3$  включены параллельно, то для них справедлива система уравнений

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ I_2 R_2 = I_3 R_3 \end{cases}, \quad (2)$$

где  $I_2$  и  $I_3$  – силы токов через резисторы  $R_2$  и  $R_3$  соответственно. Из системы (2) получаем

$$\begin{cases} I_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} I_1 \\ I_3 = \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_1 \end{cases}. \quad (3)$$

Согласно (3)  $I_2$  и  $I_3$  прямо пропорциональны силе тока  $I_1$ .

Запишем закон Джоуля – Ленца для каждого из резисторов для малого промежутка времени  $\Delta t$ . Тогда количество теплоты  $Q_1$ , выделившейся на первом резисторе

$$Q_1 = I_1^2 R_1 \Delta t, \quad (4)$$

на втором

$$Q_2 = I_2^2 R_2 \Delta t = (3) = \left( \frac{R_3}{R_2 + R_3} I_1 \right)^2 R_2 \Delta t = I_1^2 \frac{R_3^2 R_2}{(R_2 + R_3)^2} \Delta t, \quad (5)$$

на третьем

$$Q_3 = I_3^2 R_3 \Delta t = (3) = \left( \frac{R_2}{R_2 + R_3} I_1 \right)^2 R_3 \Delta t = I_1^2 \frac{R_2^2 R_3}{(R_2 + R_3)^2} \Delta t. \quad (6)$$

Как следует из (4) – (6), полученные значения выделившихся теплот относятся между собой как

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 = R_1 : \frac{R_3^2 R_2}{(R_2 + R_3)^2} : \frac{R_2^2 R_3}{(R_2 + R_3)^2}. \quad (7)$$

Кроме того, поскольку выделение теплоты происходит за счет энергии, запасенной в конденсаторе, то, согласно закону сохранения энергии, можем записать

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = W_C = \frac{CU^2}{2}. \quad (8)$$

Решая систему (7) – (8), получим

$$Q_3 = \frac{\frac{R_2^2 R_3}{(R_2 + R_3)^2}}{R_1 + \frac{R_3^2 R_2}{(R_2 + R_3)^2} + \frac{R_2^2 R_3}{(R_2 + R_3)^2}} W_C. \quad (9)$$

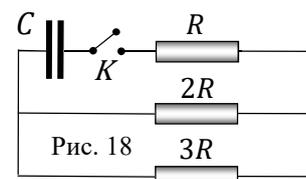


Рис. 18

После преобразований (9) примет вид

$$Q_3 = \frac{R_2^2 R_3}{(R_2 + R_3)(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_3 R_2)} \frac{CU^2}{2}. \quad (10)$$

С учётом значений сопротивлений резисторов  $R_1 = R$ ,  $R_2 = 2R$ ,  $R_3 = 3R$  выражение (10) принимает вид

$$Q_3 = \frac{4R^2 \cdot 3R}{(2R + 3R)(R \cdot 2R + R \cdot 3R + 3R \cdot 2R)} \frac{CU^2}{2} = \frac{12}{55} \frac{CU^2}{2} = \frac{6}{55} CU^2. \quad (11)$$

Расчет по формуле (11) дает

$$Q_3 = \frac{6}{55} \times 1,6 \cdot 10^{-6} \cdot 200^2 (\text{Дж}) = \{6,981818182 \cdot 10^{-3}\} = 7,0 \text{ мДж}. \quad (12)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) все окончательные расчёты приводим с точностью до двух значащих цифр, поскольку две значащие цифры содержатся во всех данных условия.

Используя (7) и (11) несложно вычислить и оставшиеся теплоты  $Q_1$  и  $Q_2$  (от школьников не требуется, но если кто все же нашел их – «бонусный» балл не жалейте!)

$$Q_1 = \frac{25}{12} Q_3 = \frac{25}{55} \frac{CU^2}{2}. \quad (13)$$

$$Q_2 = \frac{3}{2} Q_3 = \frac{18}{55} \frac{CU^2}{2}. \quad (14)$$

Как и следовало ожидать, максимальное количество теплоты в данной схеме при разрядке конденсатора выделилось на резисторе  $R_1$ , поскольку через него при этом проходит максимальный (неразветвленный) ток.

*P.S. Уважаемые члены жюри, организаторы олимпиады, коллеги! Нам предстоит интересная и творческая работа по оцениванию олимпиадных работ юных дарований на втором (районном) туре Республиканской олимпиады.*

*Давайте на этом важном этапе проверим вдумчиво, спокойно, рассудительно. Не бойтесь находить юные таланты, не пропустите оригинальность, «ловкость» разума и трудолюбие!*

*Если решения некоторых задач, представленные участниками олимпиады (а они – люди творческие!!!), отличаются от авторских, но при этом получен правильный ответ, то (после внимательного прочтения!!!) подкорректируйте «Схему оценивания» и смело ставьте баллы! Дети порой мыслят нестандартно, но, по сути, верно. Помните, что наша основная задача – не потерять юное дарование на начальных этапах олимпиады. ☺*

*Напоминаем, что на олимпиаде по физике разрешается (приветствуется!) пользование инженерным калькулятором, например, таким как «CASIO fx-991EX (CLASSWIZ)», достаточно распространенным среди одаренных ребят.*

*По всем вопросам при проведении теоретического тура олимпиады обращаться по телефону: + 375 29 766 12 87 (Леонид Григорьевич Маркович), + 375 44 544 49 55 (Артём Максимович Пивоварчик), + 375 29 190 66 79 (Владислав Викторович Климашенок).*