

## Районная олимпиада 2022 г. Экспериментальный тур. 10 класс. Решение

### 1. Теоретическая часть эксперимента

1.1. Пружина лёгкая, поэтому её массой можно пренебречь. Тогда на груз действуют две силы, сила тяжести и сила упругости. По второму закону Ньютона векторная сумма, а следовательно, и сумма проекций этих сил на вертикальную ось, равна нулю

$$k\Delta l - mg = 0.$$

Здесь  $\Delta l = l - l_0$ .

Тогда

$$k = \frac{mg}{l - l_0} \quad (1).$$

1.2. Коэффициент жёсткости двух последовательно соединённых пружин равен отношению силы упругости, действующей со стороны пружин в ответ на действие внешней силы, на растяжение пружин

$$k = \frac{F}{\Delta l}.$$

Растяжение пружин при последовательном соединении будет равно сумме растяжений каждой пружины

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2.$$

По третьему закону Ньютона, так как пружины лёгкие, внешняя сила, действующая на обе пружины, равно силе, действующей на каждую пружину. Тогда

$$\Delta l_1 = \frac{F}{k_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{F}{k_2}.$$

Таким образом

$$k = \frac{F}{\Delta l_1 + \Delta l_2} = \frac{F}{\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} \quad (2).$$

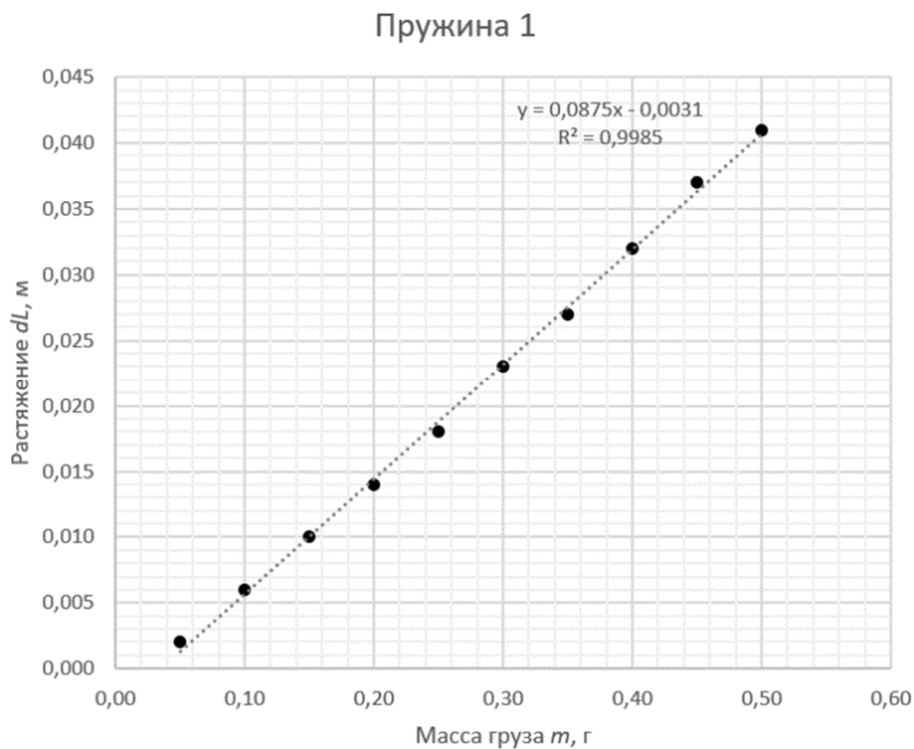
### 2. Экспериментальная часть с одной пружиной

2.1. Результаты измерений для пружин № 1 и № 2 приведены в таблице 1. Данные, полученные учащимися, могут отличаться от указанных, так как характеристики одинаковых пружин не всегда одинаковые.

Таблица 1.

к-во грузов	Масса грузов $m$ , кг	Пружина № 1		Пружина № 2	
		Длина $l_1$ , м	Удлинение $\Delta l_1$ , м	Длина $l_2$ , м	Удлинение $\Delta l_2$ , м
0	0,00	0,049	-	0,048	-
1	0,05	0,051	0,002	0,049	0,001
2	0,10	0,055	0,006	0,051	0,003
3	0,15	0,059	0,010	0,052	0,004
4	0,20	0,063	0,014	0,054	0,006
5	0,25	0,067	0,018	0,056	0,008
6	0,30	0,072	0,023	0,057	0,009
7	0,35	0,076	0,027	0,059	0,011
8	0,40	0,081	0,032	0,060	0,012
9	0,45	0,086	0,037	0,062	0,014
10	0,50	0,090	0,041	0,063	0,015

График зависимости  $\Delta l(m)$  приведён на рисунке.



2.2. Получим выражение для углового коэффициента графика  $\Delta l(m)$

$$a = \frac{\Delta l}{m}$$

Из формулы (1)

$$k = \frac{mg}{l - l_0} \rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k}$$

Тогда

$$a = \frac{mg}{mk} = \frac{g}{k} \rightarrow k = \frac{g}{a}$$

Угловой коэффициент, рассчитанный<sup>1</sup> методом наименьших квадратов (МНК), для приведённых в таблице значений

$$a_1 = 0,08752 \frac{\text{М}}{\text{КГ}}$$

Тогда

$$k_1 = \frac{9,81 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}}{0,08752 \frac{\text{М}}{\text{КГ}}} = 112,09 \frac{\text{КГ}}{\text{с}^2} = 112,09 \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

Основной вклад в погрешность вносит угловой коэффициент. Рассчитанная МНК его погрешность

$$\Delta a_1 = 0,00119 \frac{\text{М}}{\text{КГ}}; \quad \varepsilon_{a_1} = \frac{\Delta a_1}{a_1} = 0,01364.$$

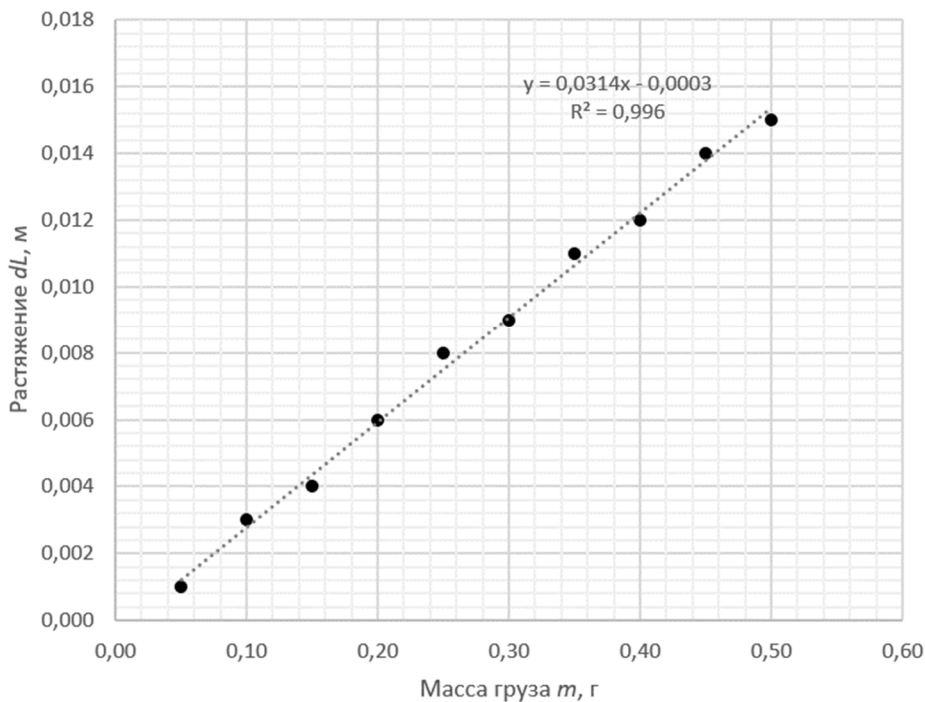
$$\varepsilon_{k_1} = \varepsilon_{a_1} = 0,01364; \quad \Delta k_1 = \varepsilon_{k_1} \cdot k_1 = 0,01364 \cdot 112,09 \frac{\text{Н}}{\text{М}} = 1,529 \frac{\text{Н}}{\text{М}} = 1,5 \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

Итоговый результат

$$k_1 = (112,1 \pm 1,5) \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

2.3. График зависимости  $\Delta l(m)$  приведён на рисунке.

Пружина 2



Угловой коэффициент, рассчитанный методом наименьших квадратов (МНК), для приведённых в таблице значений

$$a_2 = 0,03139 \frac{\text{М}}{\text{КГ}}$$

Тогда

<sup>1</sup> Угловой коэффициент также можно определить по графику, как это предлагается в школьных лабораторных работах.

$$k_2 = \frac{9,81 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}}{0,03139 \frac{\text{М}}{\text{КГ}}} = 312,52 \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

Рассчитанная МНК погрешность углового коэффициента

$$\Delta a_2 = 0,00037 \frac{\text{М}}{\text{КГ}}; \quad \varepsilon_{a_2} = \frac{\Delta a_2}{a_2} = 0,02251.$$

$$\varepsilon_{k_2} = \varepsilon_{a_2} = 0,02251; \quad \Delta k_2 = \varepsilon_{k_2} \cdot k_2 = 0,02251 \cdot 312,52 \frac{\text{Н}}{\text{М}} = 7,035 \frac{\text{Н}}{\text{М}} = 7 \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

Итоговый результат

$$k_2 = (312 \pm 7) \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

### 3. Экспериментальная часть с двумя последовательными пружинами

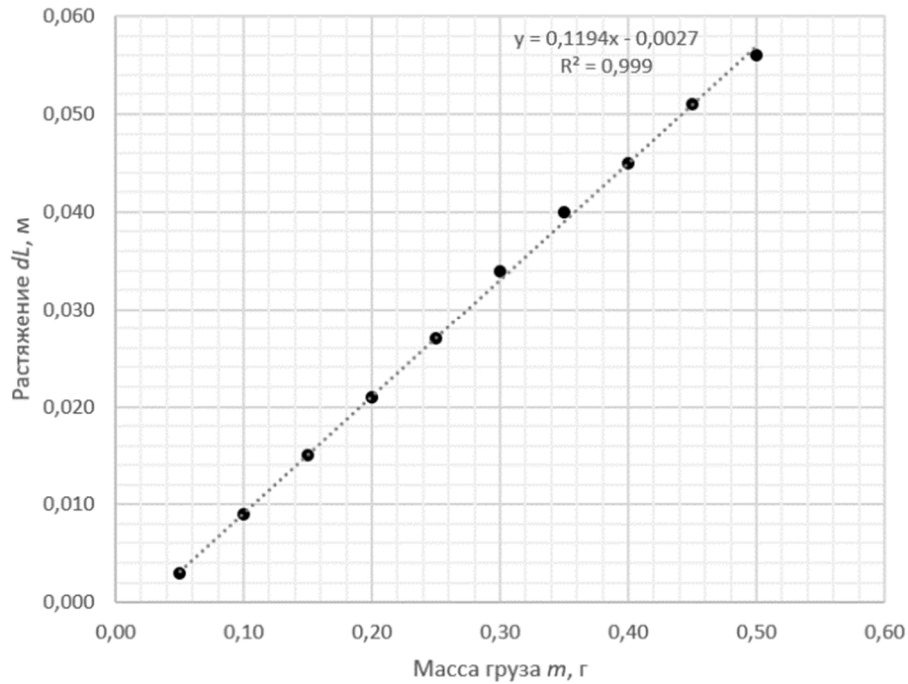
3.1. Результаты измерений для пружин № 1 и № 2, соединённых последовательно, приведены в таблице 2. Данные, полученные учащимися, могут отличаться от указанных.

Таблица 2.

к-во грузов	Масса грузов $m$ , кг	Пружины № 1 и 2 (посл. соединение)	
		Длина $l$ , м	Удлинение $\Delta l$ , м
0	0,00	0,121	-
1	0,05	0,124	0,003
2	0,10	0,130	0,009
3	0,15	0,136	0,015
4	0,20	0,142	0,021
5	0,25	0,148	0,027
6	0,30	0,155	0,034
7	0,35	0,161	0,040
8	0,40	0,166	0,045
9	0,45	0,172	0,051
10	0,50	0,177	0,056

График зависимости  $\Delta l(m)$  приведён на рисунке.

Пружина 1+2 последовательно



3.2. Угловой коэффициент, рассчитанный методом наименьших квадратов (МНК), для приведённых в таблице значений

$$a_{12} = 0,11939 \frac{\text{М}}{\text{КГ}}$$

Тогда

$$k_{12} = \frac{9,81 \frac{\text{М}}{\text{С}^2}}{0,11939 \frac{\text{М}}{\text{КГ}}} = 82,168 \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

Рассчитанная МНК погрешность углового коэффициента

$$\Delta a_{12} = 0,001308 \frac{\text{М}}{\text{КГ}}; \quad \varepsilon_{a_{12}} = \frac{\Delta a_{12}}{a_{12}} = 0,01096.$$

$$\varepsilon_{k_{12}} = \varepsilon_{a_{12}} = 0,01096; \quad \Delta k_{12} = \varepsilon_{k_{12}} \cdot k_{12} = 0,01096 \cdot 82,168 \frac{\text{Н}}{\text{М}} = 0,9006 \frac{\text{Н}}{\text{М}} = 0,9 \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

Итоговый результат

$$k_{12} = (82,2 \pm 0,9) \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

3.3.

$$k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} = \frac{112 \frac{\text{Н}}{\text{М}} \cdot 312 \frac{\text{Н}}{\text{М}}}{112 \frac{\text{Н}}{\text{М}} + 312 \frac{\text{Н}}{\text{М}}} = 82,4 \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

Вывод. Теоретически рассчитанное значение коэффициента жёсткости двух пружин, соединённых последовательно, попадает в интервал значений, полученных экспериментально.